Analyse 1 - L1 PCSM

Résumés renforcés des 7 chapitres
Cours + formules + exercices résolus + compléments de recherche

Mode d'emploi

Ce document est un outil de révision construit à partir de tes cours (chapitres 1 à 7 et ton résumé manuscrit sur les suites, les fonctions et les limites). Chaque chapitre contient : un résumé, un encadré de formules, des exercices résolus ligne par ligne, et les erreurs repérées dans les supports.

Les encadrés jaunes signalent des coquilles probables. Les encadrés verts apportent des compléments issus de cours universitaires en ligne (sources en dernière page).

Sommaire

- **Chap. 1** Les nombres réels
- **Chap. 2** Les suites numériques
- **Chap. 3** Limites et continuité des fonctions
- **Chap. 4** Dérivation
- **Chap. 5** Formule de Taylor et développements limités
- **Chap. 6** Équations différentielles
- **Chap. 7** Intégrale de Riemann et primitives
- **Annexe** Tableaux de dérivées et primitives, erreurs repérées, mémo, sources

Double.N

Chapitre 1 : Les nombres réels

1. Résumé

- **Les ensembles** : $\mathbb{N}$ (entiers naturels, pas de soustraction générale), $\mathbb{Z}$ (pas de division générale), $\mathbb{Q}$ (nombres p/q), $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ = les nombres au développement décimal périodique à partir d'un certain rang ; un irrationnel a un développement illimité non périodique.
- L'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$: si p/q est irréductible avec $p^2 = 2q^2$, alors p est pair ($p = 2n$), puis q est pair : contradiction. $\mathbb{R}$ comble ces « lacunes ».
- **Structures** : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes commutatifs ; la multiplication donne un anneau ($\mathbb{Z}$) et un corps ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) ; $\leq$ est une relation d'ordre total.
- **Valeur absolue** : $|x| = \max(x, -x)$. Elle exprime un encadrement de façon condensée et vérifie l'inégalité triangulaire.
- **Majorants et minorants** : E est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \leq M$; minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x \geq m$; bornée si les deux.
- **Borne supérieure** = plus petit majorant ; **borne inférieure** = plus grand minorant. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (axiome fondamental de $\mathbb{R}$, admis).
- $\mathbb{R}$ est **archimédien** : si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\,a > b$. $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$: entre deux réels $a < b$ il y a un rationnel (et aussi un irrationnel).
- **Topologie** : un voisinage de x_0 contient un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Un point est *adhérent* à A si tout voisinage rencontre A ; *d'accumulation* si tout voisinage rencontre $A \setminus \{a\}$.
  Bolzano-Weierstrass : toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation.

Formules clés (encadré)

Valeur absolue	$\lvert x\rvert < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho \Leftrightarrow x \in]-\rho, \rho[$
Centre x_0	$\lvert x - x_0\rvert < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$
Inégalité triangulaire	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ et $\lvert\, \lvert x\rvert - \lvert y\rvert\,\rvert \leq \lvert x - y\rvert$
Produit	$\lvert x\,y\rvert = \lvert x\rvert\,\lvert y\rvert$
Maximum	$\max(a, b) = \dfrac{a + b + \lvert a - b\rvert}{2}$
Minimum	$\min(a, b) = \dfrac{a + b - \lvert a - b\rvert}{2}$
Borne supérieure	$M = \sup E \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \leq M)$ et $(\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, M - \varepsilon < x_0)$
Borne inférieure	$m = \inf E \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \geq m)$ et $(\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, x_0 < m + \varepsilon)$

2. Intervalles

Type d'intervalle	Écriture	Majoré ?	Minoré ?
Segment (fermé borné)	$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$	oui	oui
Ouvert borné	$]a, b[= \{x : a < x < b\}$	oui	oui
Semi-ouvert borné	$[a, b[$ ou $]a, b]$	oui	oui
Minoré non majoré	$[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$	non	oui
Majoré non minoré	$]-\infty, b]$ ou $]-\infty, b[$	oui	non
Ni majoré ni minoré	$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$	non	non

Double N

3. Exercices résolus

Application 1

Énoncé	Simplifier $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x + 1)} + \sqrt{(x^2 - 6x + 9)}$ en distinguant les cas selon x.
Formule	$\sqrt{(u^2)} = \lvert u \rvert$
Étape 1	$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ et $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
Étape 2	$f(x) = \lvert x + 1 \rvert + \lvert x - 3 \rvert$
Si $x < -1$	$f(x) = -(x + 1) - (x - 3) = -2x + 2$
Si $-1 \leq x \leq 3$	$f(x) = (x + 1) - (x - 3) = 4$
Si $x > 3$	$f(x) = (x + 1) + (x - 3) = 2x - 2$

Application 2

Énoncé	Déterminer, s'ils existent, sup E, inf E, max E et min E pour $E = \{ 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$.
Valeurs	$n = 1 : 0$; $n = 2 : \frac{1}{2}$; $n = 3 : \frac{2}{3}$; ... croissante vers 1
Borne sup	$1 - \frac{1}{n} < 1$ pour tout n, et $\forall \varepsilon > 0, \exists n : 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ ($n > \frac{1}{\varepsilon}$)
Résultat	**sup E = 1 (non atteinte) ; inf E = min E = 0 (atteinte pour n = 1)**

Application 3

Énoncé	Déterminer, s'ils existent, sup E, inf E, max E et min E pour $E = \{ 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$.
Valeurs	$n = 1 : 0$; $n = 2 : \frac{3}{2}$; $n = 3 : \frac{2}{3}$; $n = 4 : \frac{5}{4}$; ...
Raisonnement	n pair : valeurs > 1 qui décroissent vers 1 ; n impair : valeurs < 1 qui croissent vers 1
Résultat	**sup E = max E = $\frac{3}{2}$ (n = 2) ; inf E = min E = 0 (n = 1)**

Application 4

Énoncé	Déterminer, s'ils existent, sup E, inf E, max E et min E pour $E = \{ \frac{3n - 1}{2n + 3}, n \in \mathbb{N} \}$.
Dérivée	$g(x) = \frac{3x - 1}{2x + 3} \Rightarrow g'(x) = \frac{3(2x + 3) - 2(3x - 1)}{(2x + 3)^2} = \frac{11}{(2x + 3)^2} > 0$
Conclusion	suite croissante : inf E = $g(0) = -\frac{1}{3}$ (atteinte) ; lim $g(n) = \frac{3}{2}$
Résultat	**sup E = $\frac{3}{2}$ (non atteinte) ; inf E = min E = $-\frac{1}{3}$**

Double-N

Régime	Condition	Solution x(t)
Pseudo-périodique	$\lambda < \omega_0$	$x = e^{-\lambda t}(A\cos \omega t + B \sin \omega t)$, $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)}$
Critique	$\lambda = \omega_0$	$x = (A + B\,t)\, e^{-\lambda t}$
Apériodique	$\lambda > \omega_0$	$x = e^{-\lambda t}(A\, e^{\mu t} + B\, e^{-\mu t})$, $\mu = \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}$

4. Exercices résolus

Application 1

Énoncé	Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 6$.
Homogène	$y' + 2y = 0 \Rightarrow y_h = K\, e^{-2x}$
Particulière	$y =$ constante : $2y = 6 \Rightarrow y_p = 3$
Résultat	$\mathbf{y = K\, e^{-2x} + 3}$

Application 2

Énoncé	Résoudre $y'' - y' - 2y = e^{3x}$.
Caractéristique	$r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow r = 2$ ou $r = -1$
Homogène	$y_h = K_1\, e^{2x} + K_2\, e^{-x}$
Particulière	3 n'est pas racine : $y_p = d\, e^{3x} \Rightarrow (9 - 3 - 2)\, d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4}$
Résultat	$\mathbf{y = K_1\, e^{2x} + K_2\, e^{-x} + \frac{1}{4}\, e^{3x}}$

Application 3

Énoncé	Résoudre $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Caractéristique	$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$)
Générale	$y = K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x$
Conditions	$y(0) = K_1 = 1$; $y'(0) = 2\, K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = 0$
Résultat	$\mathbf{y = \cos 2x}$

Application 4

Énoncé	Résoudre $y'' + 2y' + y = 0$.
Caractéristique	$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$ (double)
Résultat	$\mathbf{y = (K_1 + K_2\, x)\, e^{-x}}$

Double.N