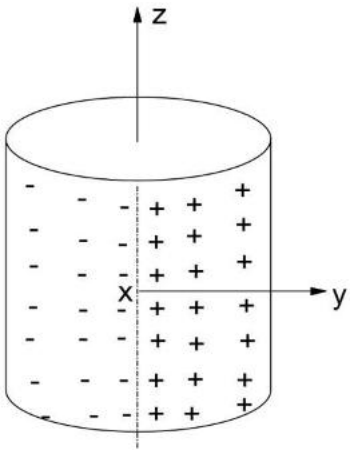
Université Cheikh Anta DIOP de Dakar 2022-2023
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Physique

TD d'Electromagnétisme _ **L2PCSM** _Semestre 3

Exercice 1 : symétrie

Soit un cylindre de rayon R, de longueur L d'axe Oz, formant la distribution de charge surfacique de la figure .1.



1. La distribution possède t- elle des invariances ? justifier la réponse.

La distribution ne possède pas d'invariance par rotation ni par translation. En effet la longueur finie ne permet pas une invariance par translation d'une part, d'autre part l'antisymétrie des charges empêche l'invariance par rotation.

2. Déterminez les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution ?

Le plan (yOz) et le plan (xOy) sont des plans de symétrie.
Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie.

3. Indiquer la direction et le sens du champ électrostatique en un point M de l'axe Oz.

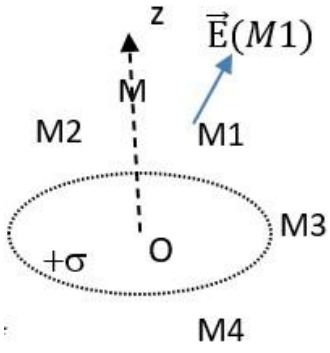
L'axe Oz est contenu dans le plan d'antisymétrie, alors la direction du vrai vecteur est perpendiculaire au plan d'antisymétrie par suite la direction du champ électrostatique est perpendiculaire à l'axe Oz. Ce champs est dirigé vers les valeurs décroissantes de y.

4. Etudier le cas du cylindre infiniment long d'axe Oz.

Le cylindre étant infiniment long, il possède une invariance par translation par rapport à l'axe Oz.
On retrouve les mêmes plans de symétrie et d'antisymétrie.
Les plans (yOz) et (xOy) sont des plans de symétrie.
Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie.
L'axe Oz est contenu dans le plan d'antisymétrie, alors la direction du vrai vecteur est perpendiculaire au plan d'antisymétrie par suite la direction du champ électrostatique est perpendiculaire à l'axe Oz. Ce champ est dirigé vers les valeurs décroissantes de y.

<u>Exercice 2</u> : Symétrie (05pts)

On considère un disque de centre O et de rayon R, chargée uniformément en surface avec une densité surfacique de charges $+\sigma$.



1. En se plaçant en coordonnées cylindriques, indiquer les invariances et plans de symétrie de cette répartition. Soit la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ **(2pts)**

La distribution admet une invariance par rotation d'angle θ **autour de l'axe Oz.**
Tout plan formé par la direction des vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie.
Le plan horizontal formé par la direction des vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie.

2. Indiquer sur la figure la direction du champ électrostatique aux points M_2 et M_4 symétrique de M_1 .
   De quelle(s) variable(s) dépend le champ en tout point de l'espace? **(2pts)**

Le champ électrostatique en M_4 est le symétrique de celui en M_1 par rapport au plan de symétrie ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta$). Le champ ne peut dépendre que de ρ et z.

3. Quelle est la direction et le sens du champ en M ? justifier la réponse.

Le point M appartient à une infinité de plan de symétrie $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$) donc le champ en M se retrouve dans une infinité de plan de symétrie ayant comme intersection l'axe Oz. Donc le champ en M est porté par l'axe Oz. L'axe Oz est un axe de symétrie

<u>Exercice 3</u> :

Soit un repère un repère cartésien (Oxyz). On considère la distribution finie de lignes de champs de la figure.1.

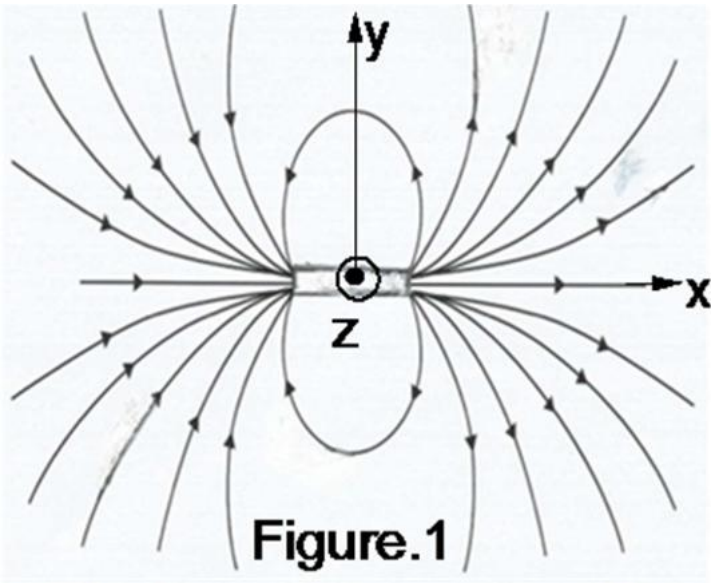


Figure.1

1. *Quels sont les plans de symétrie et d'antisymétrie de cette distribution*.
   Le plan (xoz) et la plan (xoy) sont des plans de symétrie. Car, en deux points M et M' symétriques par rapport à ces plans, les éléments de lignes de champ sont symétriques.
   Le plan (yoz) est un plan de symétrie. Car, en deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan, les éléments de lignes de champ sont antisymétriques
2. *Indiquer la bonne réponse puis la justifier.*
   - ***Un seul plan de symétrie de la distribution permet de déterminer*** :
     a. la variable dont dépendent les grandeurs ;
     b. la direction des vrais vecteurs ;
     c. la direction des pseudo vecteurs.

La réponse (c) est la bonne, car les effets à caractère pseudo vectoriel sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Un seul plan d'antisymétrie de la distribution permet de déterminer *:*

d. la variable dont dépendent les pseudos vecteurs ;
e. la direction des vrais vecteurs ;
f. la direction du pseudo vecteur

La réponse (e) est la bonne, car les effets à caractère vectoriel sont perpendiculaires au plan de d'antisymétrie.

<u>Exercice 4</u> : Phénomènes *d'induction*

1. Enoncer la loi de Lenz.

Le courant induit par ses effets s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

Bien expliquer aux étudiants que la cause est une variation de flux (augmentation ou diminution). Cette variation de flux résulte de la variation du champ magnétique (par exemple courant variable au cours temps) soit de la variation de l'aire balayée (ou aire traversée par les lignes de champ magnétique). $\Phi = \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$

2. Quel est le champ électromoteur associé à un circuit en mouvement dans un champ magnétostatique uniforme et constant ?

En considérant un circuit conducteur mobile (induit) dans un champ magnétique (champ inducteur) constant, les électrons sont soumis à la force de Laplace.

Ces électrons entrainés à la vitesse de déplacement du circuit ($\vec{v}_e$), se déplacent ($\vec{v}_r$)aussi dans la structure méttalique du conduit.

$d\,\vec{F} = dq(\vec{v}_r + \vec{v}_e) \wedge \vec{B}$ avec $\vec{v}_r = \frac{\vec{dl}}{dt}$ et $\vec{v}_e = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$

Le travail élémentaire de la force de Laplace $d^2W = d\,\vec{F}\,(\vec{v}_r + \vec{v}_e)dt$. Ce travail est nul.

Et comme $I = \frac{dq}{dt}$, en réarrangeant l'expression on obtient :

$$I_{ind}[\vec{v}_e \wedge \vec{B}].\vec{dl} = I_{ind}(-\frac{\overrightarrow{dM} \wedge \vec{dl}}{dt})\vec{B}$$

Le terme de droite $I_{ind}(-\frac{\overrightarrow{dM}\wedge\vec{dl}}{dt})\vec{B}$ a la dimension d'une puissance électrique donc $(-\frac{\overrightarrow{dM}\wedge\vec{dl}}{dt})\vec{B}$ a la dimension d'une tension électrique. Par suite $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ a la dimension d'un champ électrique. On l'appelle champ électromoteur.

Tout se passe comme s'il apparaissait dans le circuit induit un champ électromoteur induit $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ donc une force électromotrice $e_i = \oint_C (\vec{v}_e \wedge \vec{B})\,\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}$

3. Peut-on avoir une fem induite sans courant induit ? Peut-on avoir un courant induit sans fem induite ?

Il est possible d'avoir une fem induite sans courant induit si le circuit induit n'est pas conducteur**.** Par contre il ne peut y avoir de courant induit sans la fem. En effet la fem est la force électromotice du générateur induit qui libère le courant induit.

4. On considère le champ électrique : $\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \overrightarrow{\mathbf{e_y}}\mathbf{E_0}\cos(\omega\mathbf{t} - \mathbf{kx})$

Calculer $\overrightarrow{rot}\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{t})$, $div\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{t})$, et $\Delta\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{x},\mathbf{t})$.

$\overrightarrow{rot}\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial x} \wedge (\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y}\mathrm{E}_0\cos(\omega\mathrm{t} - \mathrm{kx}) = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}\mathrm{kE}_0\sin(\omega\mathrm{t} - \mathrm{kx})$

$div\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial z} = 0$

$\Delta\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t}))$ soit $\Delta\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = -k^2\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$

<u>Exercice 5</u> :

On considère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dont les composantes sont définies par :

$x_{\overrightarrow{OM}} = -OM_x\sin(\omega t - kz)$, $y_{\overrightarrow{OM}} = OM_y\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$ et $z_{\overrightarrow{OM}} = 0$, où OM_x, OM_y et ω sont des constantes positives.

1. Quelle est la trajectoire décrite par l'extrémité du vecteur $(\overrightarrow{OM})$?

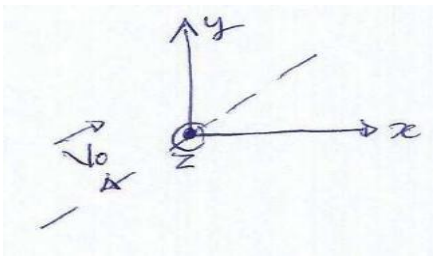
Il faut trouver une relation entre les composantes en éliminant les variables temporelles et spatiales.

$\frac{x_{\overrightarrow{OM}}}{y_{\overrightarrow{OM}}} = \frac{OM_x}{OM_y} = -\frac{\sin(\omega t - kz)}{\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})} = 1$, La trajectoire décrite est une droite.

2. Calculer la vitesse $\vec{v}(0,0)$ de l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en $z = 0$ et à l'instant initial $t = 0$.

$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -OM_x\omega\cos(\omega t - kz)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} + -OM_y\omega\sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y}$ soit : en $z = 0$ et à l'instant initial $t = 0, on\ a$: $\vec{v}(0,0) = -OM_x\omega\vec{e}_x - OM_y\omega\vec{e}_y$

3. Dans un repère orthonormé (xoy), représenter le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'origine $\overrightarrow{OM}(0,0)$ et la vitesse initiale $\vec{v}(0,0)$. En déduire le sens du mouvement de l'extrémité du vecteur $(\overrightarrow{OM})$.



$$\overrightarrow{OM}(0,0) = \vec{0}$$

NB : Lorsque le vecteur $(\overrightarrow{OM})$ représente le champ électrique d'une onde plane, alors la trajectoire décrite forme son état de polarisation et le sens dans lequel cette trajectoire est décrite indique le sens de polarisation.

TPE : Répondre aux mêmes questions dans le cas où on a d'un champ électrique :

$E_x = E_{0x}\sin(\omega t - kz)$, $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz)$ et $E_z = 0$, où $E_{0x} = E_{0y}$

Exercice 6 : Ondes planes progressives (07pts)

On considère une onde plane sinusoïdale de pulsation ω dont le potentiel vecteur s'écrit :

$$\vec{A} = E_{0z}\exp j(\omega t + kx)\vec{e}_z + E_{0y}\exp j(\omega t + kx)\vec{e}_y$$

1. Déterminer les composantes du champ magnétique $\vec{B}$.

Utilisons la relation $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}$

L'onde est plane donc on peut écrire que : $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \wedge (A_z\vec{e}_z + A_y\vec{e}_y)$

$\overrightarrow{rot}\vec{A} = -\vec{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_y}{\partial x} = -\vec{e}_y jkA_z + \vec{e}_z jkA_y$ **soit**

$\boxed{\vec{B} = -\vec{e}_y jkE_{0z}\exp j(\omega t + kx) + \vec{e}_z jkE_{0y}\exp j(\omega t + kx)}$ **ou**

$$\boxed{\vec{B} = \vec{e}_y kE_{0z}\exp j\left(\omega t + kx - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{e}_z kE_{0y}\exp j\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right)}$$

2. Déterminer les composantes du champ électrique $\vec{E}$. **(2pts)**

   Utilisons la relation de structure de l'onde plane : $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = -\frac{\vec{e_x}\wedge\vec{E}}{c}$ **avec** $\vec{k} = -\vec{e}_x k$

   $\vec{E} = c\vec{B} \wedge (-\vec{e}_x)$ **soit** $\vec{E} = c(B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z) \wedge (-\vec{e}_x) = \vec{e}_z cB_y - \vec{e}_y cB_z$

   Soit $\vec{E} = \vec{e}_z ckE_{0z}\exp j\left(\omega t + kx - \frac{\pi}{2}\right) - \vec{e}_y ckE_{0y}\exp j\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right)$

   $$\vec{E} = \vec{e}_z \omega E_{0z}\exp j\left(\omega t + kx - \frac{\pi}{2}\right) - \vec{e}_y \omega E_{0y}\exp j\left(\omega t + kx + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. En notation réelle, déterminer la densité d'énergie électromagnétique de l'onde et sa valeur moyenne dans le temps.

$U_{oem} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ et comme il ya équipartition de l'énergie on a : $U_{oem} = \varepsilon_0 E^2$

$$U_{oem}(x,t) = \varepsilon_0\left(E_z^2 + E_y^2\right) = \varepsilon_0\left(E_{0z}^2 + E_{0y}^2\right)sin^2(\omega t + kx)$$

La moyenne temporelle : $< U_{oem} >= \varepsilon_0\left(E_{0z}^2 + E_{0y}^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T sin^2(\omega t + kx)dt$

$$\boxed{< U_{oem} >= \varepsilon_0 \frac{1}{2}\left(E_{0z}^2 + E_{0y}^2\right)}$$

Exercice 7 : Ondes planes sinusoïdales (08pts)

Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale de pulsation ω, se propage dans le vide en l'absence de courant et de charges. Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E} = -\vec{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz)$$

1. Quel est l'état de polarisation de l'onde ? Justifier votre réponse

   L'onde est polarisée rectilignement, en effet la direction du champ est fixe au cours du temps.

2. Cette onde rencontre une autre onde qui se propage vers les valeurs décroissantes de z et dont le champ électrique s'écrit :

   $$\vec{E'} = \vec{e}_x E_0 \sin(\omega t + kz)$$

   Déterminer les composantes du champ électrique résultant **(2pts)** : $\vec{E}_R = \vec{E} + \vec{E}'$

   $$\vec{E}_R = -\vec{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \vec{e}_x E_0 \sin(\omega t + kz)$$

   $$\vec{E}_R = \vec{e}_x E_0 \sin 2(kz)\cos 2(\omega t)$$

3. L'onde résultante est-elle plane, progressive ? Justifier votre réponse.

L'onde est plane mais elle n'est pas progressive car il n'existe de phase spatio temporelle.

4. Déterminer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi_R}$ et sa valeur moyenne temporelle. Interpréter ce résultat.

   $\overrightarrow{\Pi_R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$

Utilisons la relation Maxwell –faraday pour calculer d'abord $\vec{B}$.

$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_R} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ soit $\vec{B} = -\int \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_R}\, dt$ avec $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_R} = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \frac{\partial E_x}{\partial z} = \vec{e}_y E_0 2k\cos 2(kz)\cos 2(\omega t)$

$$\vec{B} = -\int \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\mathbf{E_0 2k cos2(kz)\,cos2(\omega t)}\,\boldsymbol{dt} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}\frac{\mathbf{E_0 k}}{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{cos2(kz)\,sin2(\omega t)}$$

$$\overrightarrow{\Pi_R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\mathbf{E_0 sin2(kz)\,cos2(\omega t)}\frac{\mathbf{E_0 k}}{\mu_0\boldsymbol{\omega}}\mathbf{cos2(kz)\,sin2(\omega t)}$$

$$\overrightarrow{\Pi_R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\frac{\mathbf{{E_0}^2 k}}{\mu_0\boldsymbol{\omega}}\mathbf{sin2(kz)cos2(kz)\,cos2(\omega t)\,sin2(\omega t)}$$

Le vecteur moyen $< \overrightarrow{\Pi_R} > = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}\frac{\mathbf{{E_0}^2 k}}{\mu_0\boldsymbol{\omega}}\mathbf{sin2(kz)cos2(kz)}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_0^T \mathbf{cos2(\omega t)\,sin2(\omega t)}\,\boldsymbol{dt} = \vec{\mathbf{0}}$

Le vecteur moyen de Poynting est nul ainsi l'énergie électromagnétique ne se déplace pas.

Rappels : Quelques formules trigonométriques

$cos(a) + cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$; $sin(a) - \sin(b) = sin\left(\frac{a-b}{2}\right)cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Exercice 8 :

Une onde plane se propage dans le vide suivant la direction de l'axe Oz. Le champ électrique de cette onde est : $\vec{E}\begin{cases} E_x = E_{0x}\sin(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{matrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{matrix}$

1. Indiquer l'état de polarisation de l'onde.

L'état de polarisationpeut peut être déterminer par le rapport entre les amplitudes des composante et leur différence.

$\frac{E_x}{E_{0x}} = \sin(\omega t - kz)\ et \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - kz)$ soit $\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$

$$\triangle\,\Phi = \Phi_y - \Phi_x = +\frac{\pi}{2}$$

Si $E_{0x} = E_{0y}$ alors la trajectoire est circulair et la polarisation est circulaire droite. C'est-à-dire l'extrémité du vecteur champ électrique décrit un cercle de la gauche vers la droite pour l'observateur ayant le vecteur d'onde pointé vers lui.

2. Calculer les composantes du champ magnétique.

L'onde est plane et donc $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{\overrightarrow{e_z}\wedge\vec{E}}{c} = \frac{\overrightarrow{e_z}\wedge(\overrightarrow{e_x}E_x + \overrightarrow{e_y}E_y)}{c} = \frac{\overrightarrow{e_y}E_x - \overrightarrow{e_x}E_y}{c}$ soit

$$\vec{B} = \frac{\overrightarrow{e_y}E_{0x}\sin(\omega t - kz) - \overrightarrow{e_x}E_{0y}\cos(\omega t - kz)}{c}$$

3. Calculer les composantes du vecteur de Poynting.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}\wedge\overrightarrow{e_z}\wedge\vec{E}}{\mu_0 c} = \overrightarrow{e_z}c\varepsilon_0 E^2$$

4. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers une surface S disposée perpendiculairement à la direction de propagation et en déduire le flux moyen.

$P = \oiint \vec{\Pi}.\overrightarrow{ds}$ avec $\overrightarrow{ds} = \vec{e}_z ds$ indépendant du vecteur $\vec{\Pi}$ donc $P = \Pi.S$