UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP **Année universitaire 2022-2023**
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES **Section : L1PCSM**
Département de physique

Mécanique du point

SERIE N°1, Outils mathématiques (les vecteurs)

Exercice 1 :

Dans un système d'axes orthonormés, on donne les vecteurs suivants : $\vec{A} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ et $\vec{B} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$

1°) Calculer les modules des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $(\vec{A} + \vec{B})$

2°) Déterminer l'angle θ formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

3°) Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ de l'axe portant le vecteur $(\vec{A} + \vec{B})$

4°) Déterminer les angles, α et β que fait le vecteur unitaire $\vec{u}$ avec les axes (ox) et (oy) respectivement.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé direct R(O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), on donne les points suivants : A(-1, 0, -1); B(0, 1, 1) et C(1, 14, -1)

1°) Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$. En déduire l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

2°) Montrer que les points O, A, B et C, ne sont pas coplanaires.

3°) Calculer l'aire du triangle (OAB) puis le volume du parallélépipède défini par $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

Exercice 3 :

Soit un repère cartésien orthonormé R(O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Soient $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ les bases cylindriques et sphériques respectivement. Soit un point M repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R.

1°) Exprimer les vecteurs unitaires des bases cylindriques et sphériques dans la base cartésienne.

2°) Déterminer le vecteur déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par rapport à R dans les bases cartésiennes, cylindriques et sphériques.

3°) Calculer : $\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}$; $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}$; $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

4°) Déterminer les éléments de surface dS et de volume dV dans le système de coordonnées cylindriques.

Exercice 4 :

1°) Soient les fonctions supposées continues et dérivables dans les domaines qui nous intéressent :

a°) $f(x) = xe^{-2x}$; b°) $f(x) = \left(x + \frac{2}{x^2}\right)x$; c°) $f(x) = ln\left(\frac{5x+2}{x}\right)$, où x est une fonction du temps t.

Calculer $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ et $\frac{df(x)}{dt}$ dans chaque cas.

2°) Soit le vecteur $\vec{v} = \sqrt{4 - t^2}\,\vec{e}_x + e^{-3t}\vec{e}_y + \ln(t+1)\vec{e}_z$

Evaluer $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ puis conclure.

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP **Année universitaire 2022-2023**
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES **Section : L1PCSM**
Département de physique

SERIE N°2, TD de Mécanique du point matériel

Exercice 1 : Mouvement plan – Repères cartésien et de Frénet

Sur un plan (xOy) d'un repère orthonormé direct R(O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y$), un point matériel M décrit un mouvement curviligne défini par l'équation horaire: $\overrightarrow{OM} = (2t-2)\vec{e}_x + (t^2 - 2t + 3)\vec{e}_y$ **où t est le temps en seconde**.

1°) Déterminer l'équation de la trajectoire de M puis en déduire sa nature.

2°) Déterminer en fonction du temps, les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse $\vec{V}(M)$ et accélération $\vec{a}(M)$.

3°) Déduire des résultats précédents les composantes de l'accélération dans la base locale de Frénet puis le rayon de courbure $\rho(t)$ de la trajectoire.

Exercice 2 : Mouvement curviligne – Bases polaires

Soit un repère orthonormé direct R(O, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Un point matériel M décrit, dans le plan (xOy), un mouvement suivant la trajectoire (**voir Figure 1**) d'équation polaire :

$r(\theta) = \frac{1}{2} r_o(1 + cos\theta)$ où r_o est une longueur donnée, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $\dot{\theta} > 0$

1°) Vérifier que le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, peut se mettre sous la forme :

$$\vec{V}(M) = r_o\dot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right]$$

2°) Déterminer le module du vecteur vitesse de M. En déduire le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire et l'angle $(\widehat{\vec{e}_\theta, \vec{\tau}})$

3°) Déterminer les composantes tangentielle a_τ et normale a_n du vecteur accélération $\vec{a}(M)$. En déduire le rayon de courbure ρ et le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la trajectoire.

4°) Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne $S(\theta)$ sachant que $S(\theta = 0) = 0$ puis calculer la longueur totale de la trajectoire.

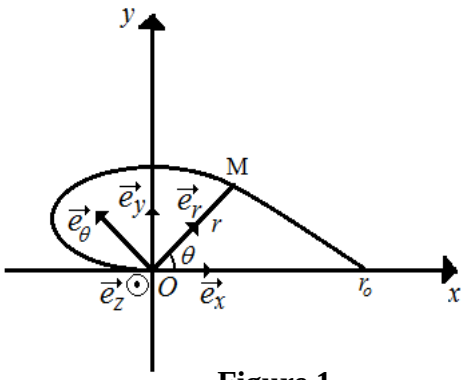


Figure 1

Exercice 3 : Composition de mouvements – Changement de repère

Soient un référentiel R(O, x, y, z) supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un référentiel $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_{z1})$. Les axes ($Oz$) et ($O_1z_1$) restent colinéaires au cours du temps (**voir Figure 2**). Le point O_1 est repéré par : $\overrightarrow{OO_1} = \alpha t\, \vec{e}_z$ ***où α est une constante.***

La base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_{z1})$ tourne autour de l'axe (Oz) d'un angle $\varphi = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{e}_1})$ tel que $\varphi = \omega\, t$. Sur le plan horizontal ($x_1O_1y_1$), une tige (T) tourne autour de l'axe (O_1z_1) d'un angle $\theta = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_r})$ tel que $\theta = \Omega\, t$. ***Les valeurs ω et Ω sont des vitesses angulaires constantes, t est le temps***. On considère la base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ comme l'indique **la figure ci-dessous**. Un point matériel M se déplaçant sur la tige (T), est repéré dans le référentiel R_1 par : $\overrightarrow{O_1M} = r\, \vec{e}_r$.

1°) Déterminer les expressions de la vitesse relative $\vec{V}_r(M)$ et de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. En déduire l'expression de la vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

2°) Déterminer les expressions des accélérations relative $\vec{a}_r(M)$, d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{a}_c(M)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ puis en déduire l'accélération absolue $\vec{a}_a(M)$.

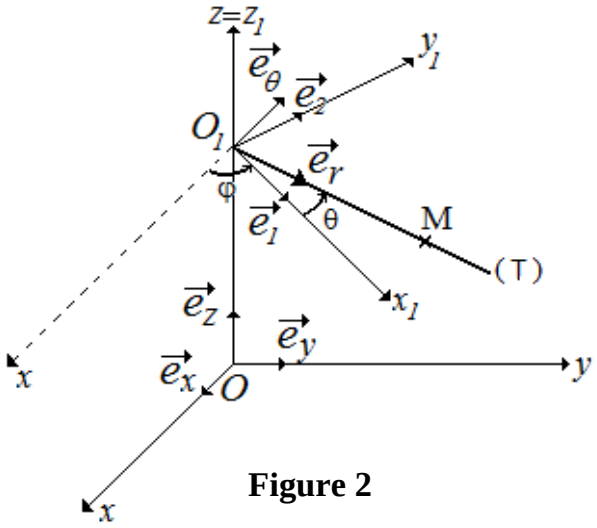


Figure 2