Département de Physique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop -Dakar

L1PCSM
2023/2024

-==*==*==*==*==*==*==-

Corrigé_Travaux Dirigés d'Optique 4ème Série
Période du … au … 2024

Exercice hors_série : Un miroir pour la salle de bain de Nogaye.

Cet exercice ne sera pas corrigé en salle. Il doit être traité par les étudiants en travail personnel (TPE). En cas de difficulté, suivre les étapes de la méthodologie d'apprentissage indiquée lors de la séance introductive.

Nogaye souhaite équiper sa salle de bain d'un miroir. Sachant que sa taille L est de $170\ cm$ et que ses yeux sont à une altitude $h = 160\ cm$ du sol, déterminer :

1. La hauteur minimale H que doit avoir le miroir pour que Nogaye puisse s'y voir entièrement ;
2. La distance d du sol à la laquelle le miroir doit être fixé.

Exercice 3_1 : Stigmatisme rigoureux d'un dioptre sphérique

Soient A_1 un objet lumineux rectiligne et Σ une surface sphérique d'axe $z'z$, de centre $C\begin{pmatrix} z_c = 0 \\ x_c = 0 \end{pmatrix}$ et de sommet S, séparant les milieux transparents homogènes et isotropes d'indices de réfraction respectifs n_1 et n_2.

1. La position de tout point d'incidence I est entièrement définie par l'angle $\theta = (\overrightarrow{e_z}\,;\,\overrightarrow{CI})$. Montrer que la quantité $n_i \frac{\overline{A_iC}}{\overline{A_iI}}$ est un invariant du système.

$$\begin{cases} Triangle\ (A_1IC): \dfrac{\overline{A_1I}}{\sin(\pi-\theta)} = \dfrac{\overline{CI}}{\sin\alpha_1} = \dfrac{\overline{CA_1}}{\sin i_1} \\ Triangle\ (A_2IC): -\dfrac{\overline{A_2I}}{\sin\theta} = -\dfrac{\overline{CI}}{\sin\alpha_2} = \dfrac{\overline{CA_2}}{\sin(\pi+i_2)} \end{cases} ;\ soit \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\overline{A_1I}}{\overline{CA_1}}\sin i_1 \\ \sin\theta = \dfrac{\overline{A_2I}}{\overline{CA_2}}\sin i_2 \end{cases} ;\ d'où:\ \frac{\overline{A_1I}}{\overline{CA_1}}\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\overline{A_2I}}{\overline{CA_2}}$$

Or $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (réfraction en I, d'où $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$ et par suite :

$$n_2\frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2I}} = n_1\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1I}} \quad ou\ encore:\ n_2\frac{\overline{A_2C}}{\overline{IA_2}} = n_1\frac{\overline{A_1C}}{\overline{IA_1}} = cte$$

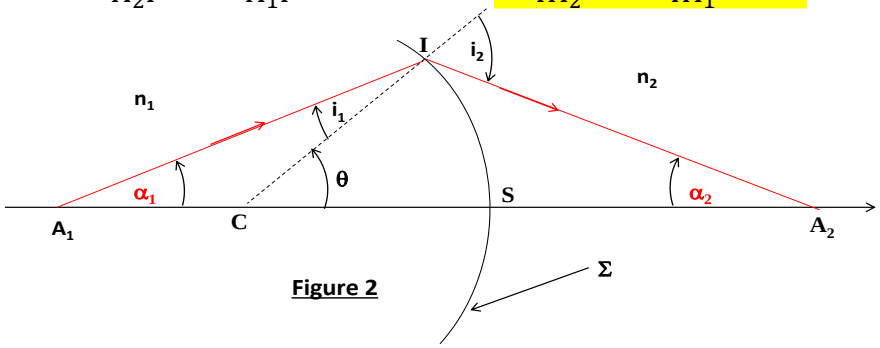


Figure 2

2. Exprimer le chemin optique pour un rayon partant du point A_1 et passant par un point A_2 en émergeant du dioptre Σ par l'un quelconque de ses points I.

$$L_{A_1A_2} = n_1\overline{A_1I} + n_2\overline{IA_2}$$

3. exprimer les mesures IA_1 et IA_2 en fonction de l'angle θ et des caractéristiques du système.

$$A_1I = \left\|\overline{A_1I}\right\|;\ or\ \ \overline{A_1I} = \overline{A_1C} + \overline{CI} \Rightarrow A_1I = \sqrt{A_1C^2 + CI^2 + 2\overline{A_1C}.\overline{CI}}$$

$$Posons:\ \overline{CA_i} = z_{A_i} = z_i\,,\qquad \overline{CI} = R\ \ et\ donc\ \ \overline{A_1C}.\overline{CI} = -z_1R\cos\theta$$

D'où finalement :

$$\overline{A_1I} = A_1I = \sqrt{z_1^2 + R^2 - 2Rz_1\cos\theta}$$

De même :

$$\overline{IA_2} = IA_2 = \sqrt{z_2^2 + R^2 - 2Rz_2\cos\theta}$$

Puisque : $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{CA_2} = Rz_2\cos(\pi-\theta) = -Rz_2\cos\theta$

4. montrer que le stigmatisme n'est réalisé que pour trois types de couples objet/image, que l'on déterminera.

Le stigmatisme rigoureux est réalisé si la position $z_2 = \overline{CA_2}$ de l'image ne dépend pas du point d'incidence I considéré (ne dépend pas de l'angle θ).

- **R1 : Premier couple pour lequel le système est rigoureusement stigmatique :**
  Pour un objet placé à la surface du système $A_1 \equiv I$, l'image sera localisée à la position A_2 telle que l'invariant du système puisse être transformé en :

$$\overline{IA_2} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}}\,\overline{IA_1} = 0; \quad puisque\ \overline{IA_1} = 0$$

L'image d'un objet placé en I sur la surface du système se superpose à l'objet. **Le système est stigmatique pour le couple I/I , quelle que soit la position I considérée sur la surface Σ.**

- **R2 : Deuxième couple pour lequel le système est rigoureusement stigmatique :**
  Pour un objet placé au centre du système $A_1 \equiv C$, $soit$ $z_1 = 0$, l'image sera localisée à la position $z_2 = 0$

L'image d'un objet placé au centre C du système se superpose à l'objet. **Le système est stigmatique pour le couple C/C.**

Une autre méthode consisterait à utiliser la condition de stigmatisme rigoureux du système pour le couple A_2/A_2 :

$$L_{A_1A_2} = n_1\overline{A_1I} + n_2\overline{IA_2} = constante$$

Qu'on met sous la forme :

$$n_1\sqrt{z_1^2 + R^2 - 2Rz_1\cos\theta} \pm n_2\sqrt{z_2^2 + R^2 + 2Rz_2\cos\theta} = constante$$

$$n_1R \pm n_2\sqrt{z_2^2 + R^2 + 2Rz_2\cos\theta} = cte$$

$$d'où, \qquad en\ dérivant: \mp n_2\frac{Rz_2\sin\theta}{\sqrt{z_2^2 + R^2 + 2Rz_2\cos\theta}} = 0 \ \ \forall\theta$$

L'image est donc située en $z_2 = 0$, c'est-à-dire au centre C.

- **R3 : Troisième couple pour lequel le système est rigoureusement stigmatique :**

Tenant compte de l'invariant $n_2\frac{z_2}{IA_2} = n_1\frac{z_1}{IA_1}$, on obtient $n_2^2z_2^2(\overline{IA_1})^2 = n_1^2z_1^2(\overline{IA_2})^2$; soit :

$$n_2^2z_2^2(z_1^2 + R^2 - 2Rz_1\cos\theta) = n_1^2z_1^2(z_2^2 + R^2 - 2Rz_2\cos\theta)$$

Ou encore :

$$n_2^2z_2^2(z_1^2 + R^2) - n_1^2z_1^2(z_2^2 + R^2) + 2Rz_1z_2(-n_2^2z_2 + n_1^2z_1)\cos\theta = 0$$

Si le stigmatisme rigoureux est réalisé, cette relation doit être vérifiée quelle que soit la valeur prise par l'angle θ. Cela ne peut se réaliser que si le coefficient de $\cos\theta$ est nul, c'est-à-dire si :

$$2Rz_1z_2(n_1^2z_1 - n_2^2z_2) = 0 \implies n_1^2z_1 - n_2^2z_2 = 0$$

La position de l'image A_2 d'un objet A_1 placé à $\overline{CA_1} = z_1$ est :

$$\overline{CA_2} = z_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 z_1$$

Le terme en $\cos\theta$ étant nul, la condition de stigmatisme devient :

$$n_2^2z_2^2(z_1^2 + R^2) - n_1^2z_1^2(z_2^2 + R^2) = 0$$

Soit, en remplaçant z_2 par son expression en fonction de z_1 :

$$n_2^2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^4 z_1^2(z_1^2 + R^2) - n_1^2z_1^2\left(\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^4 z_1^2 + R^2\right) = 0$$

Soit, après simplification :

$$z_1 = \pm\frac{n_2}{n_1}R$$

Et par suite, en utilisant la relation entre $z_2 \ et \ z_1$, on trouve :

$$z_2 = \pm\frac{n_1}{n_2}R$$

Le système est stigmatique pour le couple A_1/A_2 (points de Weierstrass) tels que :

$$\boldsymbol{z_1 = \overline{CA_1} = -\frac{n_2}{n_1}\overline{CS} \ \ et \ \ z_2 = \overline{CA_2} = -\frac{n_1}{n_2}\overline{CS}}$$

Nota : la solution avec le signe (+) a été générée par les calculs lorsque nous avons élevé au carré les termes de l'invariant. La solution physiquement acceptable est celle avec le signe (-), puisque c'est avec cette solution que les rayons incident et réfracté se trouvent de part et d'autre de la normale en I.

Exercice 3_2 : Miroir parabolique.

Un miroir parabolique de foyer F et de sommet S reçoit un faisceau parallèle à son axe. On considère le repère orthonormé (Sxy). La trace du miroir dans ce plan est une parabole d'équation $x = -\frac{y^2}{2p}$ de foyer $F\begin{pmatrix}-p/2\\0\end{pmatrix}$ où p est une constante positive homogène à une longueur.

1. Calculer le chemin optique $L = [HF]$ en fonction des coordonnées du point I et de la distance $d = H_0S$ où H_0 est la projection orthogonale du point H sur l'axe optique.

$$L = n\overline{HI} + n\overline{IF}$$

Attention : les mesures algébriques sont comptées positivement dans le sens réel de propagation de la lumière. $\overline{HI}$ sera comptée positivement dans le sens de la lumière incidente $(+\vec{e_x})$, alors que $\overline{IF}$ est comptée positivement dans le sens de la lumière réfléchie $(-\vec{e_x})$. Du point de vue mathématique, nous ne pouvons effectuer des calculs algébriques que si nous fixons un sens positif unique.

Si nous considérons comme sens mathématique positif celui de la lumière incidente, le chemin optique s'écrit :

$$L = n\overline{HI} - n\overline{IF}$$

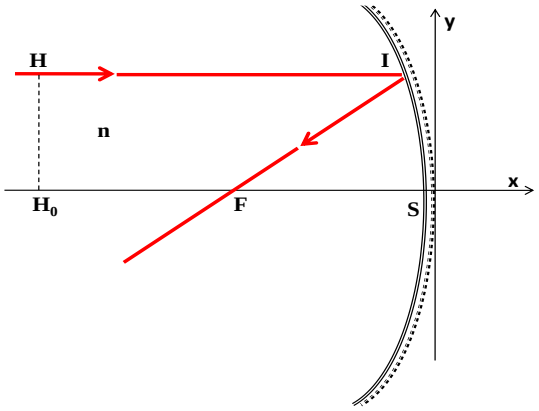
Or dans le repère (Sxy), nous avons :

$H\begin{pmatrix}-d\\y\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}-p/2\\0\end{pmatrix}$; $I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; $S\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases}\overline{HI} = \|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{(x+d)^2}\\ \overline{IF} = -\|\overrightarrow{IF}\| = -\sqrt{\left(-\frac{p}{2}-x\right)^2 + y^2}\end{cases}$

Le chemin optique s'écrit :

$$L = n\sqrt{(d+x)^2} + n\sqrt{\left(\frac{p}{2}+x\right)^2 + y^2}$$



2. Montrer qu'après réflexion sur le miroir, tous les rayons incidents convergent vers le même point (qui est le foyer F du miroir, quel que soit le point d'incidence I.

En tenant compte de l'équation de la trace de la parabole $\left(x = -\frac{y^2}{2p}\right)$, l'expression du chemin optique devient :

$$L = n\left[\sqrt{(d+x)^2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}\right] \quad soit \quad L = n\left(d+\frac{p}{2}\right)$$

Commentaire.

Le chemin optique L est donc indépendant de la position du point d'incidence I et, par conséquent, indépendant de l'inclinaison du rayon incident par rapport à l'axe : le miroir parabolique est donc **rigoureusement stigmatique** pour tout point situé à l'infini. Le foyer image du miroir est confondu avec le foyer F de la parabole.

Exercice 3_3 : Stigmatisme approché d'un dioptre plan n_1/n_2

On considère un dioptre plan séparant les milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 . Un rayon lumineux, issu d'un point objet A_1 , arrive en I (quelconque) sur le dioptre sous incidence i_1 et est réfracté dans la direction faisant un angle i_2 avec la normale au dioptre en I.

1. Tracer le rayon réfracté pour trois positions différentes du point d'incidence I. On traitera la question dans le cas $n_1 < n_2$, puis dans le cas $n_1 > n_2$.

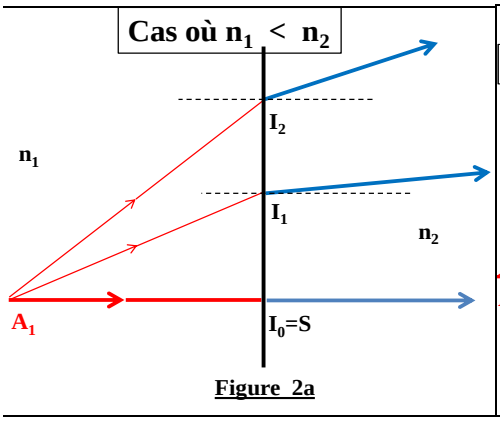


Figure 2a

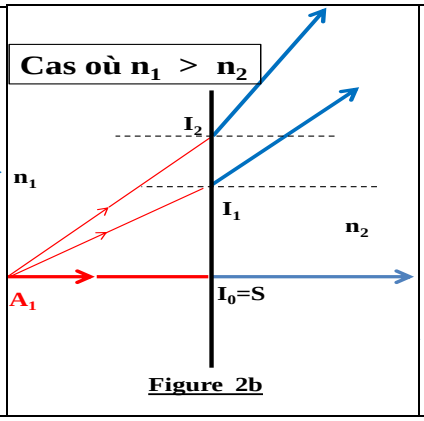


Figure 2b

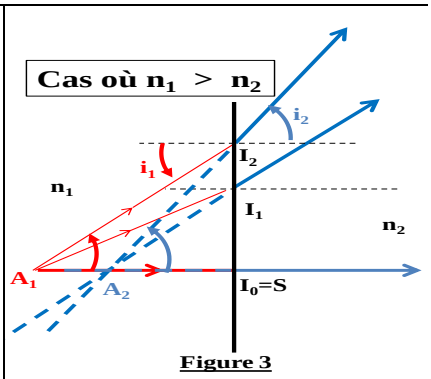


Figure 3

2. Pour quelles positions de A_1 y a-t-il stigmatisme rigoureux du système ?

Si le système est rigoureusement stigmatique, il donne de l'objet ponctuel A_1 une image A_2 ponctuelle également. Cette image se trouverait à l'intersection des rayons émergents (voir figure 3 pour le cas $n_1 > n_1$).

Si nous considérons les triangles $\widehat{A_1I_0I_2}$ et $\widehat{A_1I_0I_2}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} tani_1 = \dfrac{\overline{I_0I_2}}{-\overline{I_0A_1}} \\ tani_2 = \dfrac{2}{-\overline{I_0A_2}} \end{cases} \quad soit: \frac{tani_2}{tani_1} = \frac{\overline{I_0A_1}}{\overline{I_0A_2}}$$

Or

$$\frac{tani_2}{tani_1} = \frac{sini_2}{sini_1}.\frac{cosi_1}{cosi_2} = \frac{n_1}{n_2}.\frac{cosi_1}{cosi_2}$$

Et par suite la relation précédente devient :

$$\frac{\overline{I_0A_1}}{\overline{I_0A_2}} = \frac{n_1}{n_2}.\frac{cosi_1}{cosi_2} \quad ou\ encore: \overline{I_0A_2} = \frac{n_2}{n_1}.\frac{cosi_2}{cosi_1}.\overline{I_0A_1}$$

Cette dernière relation traduit le fait que pour une position donnée ($\overline{I_0A_1}$) de l'objet, il existe une multitude de positions ($\overline{I_0A_2}$) de l'image correspondante, dépendant de l'inclinaison du rayon incident considéré : **le stigmatisme rigoureux n'est pas réalisé pour ce système**.

3. Montrer qu'il y a stigmatisme approché du système lorsque les rayons issus de A_1 sont paraxiaux.

Un rayon paraxial est un rayon faiblement incliné par rapport à l'axe optique. Dans ces cas, l'angle d'incidence i_1 et par suite l'angle de réfraction i_2 sont faibles. Leurs cosinus peuvent être linéarisés par un développement limité au premier ordre, ce qui donne $\begin{cases} cosi_1 \approx 1 \\ cosi_2 \approx 1 \end{cases}$ et finalement :

$$\overline{I_0A_2} \approx \frac{n_2}{n_1}.\overline{I_0A_1}$$

Qui traduit que pour une position donnée ($\overline{I_0A_1}$) de l'objet, les rayons paraxiaux émergent du système en convergeant vers une **position unique** ($\overline{I_0A_2}$: **le stigmatisme (approché) est réalisé pour ce système**.

4. Dans le cas où $n_1 > n_2$, quelle serait la nature de l'image d'un objet réel A_1 ?

L'image A_2 n'existe que si le système est stigmatique. Cette condition est réalisée si seuls les rayons paraxiaux issus de A_1 parviennent au système. Dans ce cas, la position de l'image serait $\overline{IA_2} = \frac{n_2}{n_1}\overline{IA_1}$. D'autre part si l'objet A_1 est réel, alors $\overline{IA_1} < 0$ et par suite $\overline{IA_2} < 0$ également. L'image A_2 ne serait pas située dans l'espace image réel : **l'image serait virtuelle**.