Département de Physique
Faculté des Sciences et Techniques
Université Cheikh Anta Diop -Dakar

L1PCSM
2023/2024

-==*==*==*==*==*==*==-

Corrigé_Travaux Dirigés d'Optique 3ème Série
Période du ... au ... décembre 2024

Exercice 2_1 : Constructions de Huygens

On considère un dioptre plan dont les milieux limites ont respectivement comme indices de réfraction n_1 et n_2.

1. Construire, avec soin, le rayon réfracté en un point *I* du dioptre où la lumière est envoyée sous un angle d'incidence i_1.
   Consigne : Faire la construction dans chacun des deux cas possibles, c'est-à-dire pour le cas où la lumière incidente se propage dans le milieu le moins réfringent ($n_1 < n_2$) et dans le cas inverse ($n_1 > n_2$).
   deux constructions : une qui repose sur des cercles de Huygens de rayons respectifs n_1 *et* n_2, puis une autre qui considère les cercles de rayons respectifs $\frac{1}{n_1}$ *et* $\frac{1}{n_2}$

Il s'agit de la mise en évidence théorique de la 2ème loi de Descartes-Snell pour la réfraction :

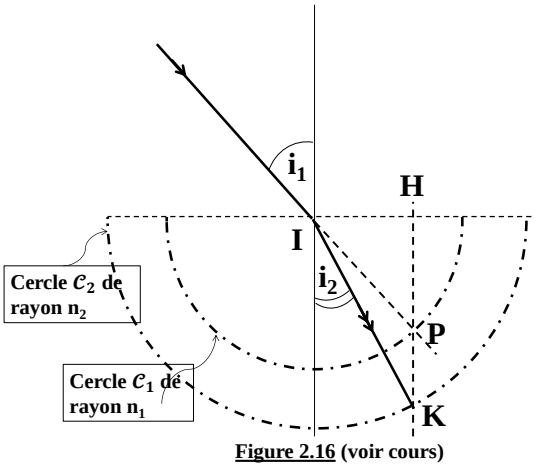


Figure 2.16 (voir cours)

1ère construction du rayon réfracté en *I* ($n_1 < n_2$) :

- On construit les cercles concentriques $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$, de centre *I* et de rayons respectifs n_1 *et* n_2 ;
- Du point d'incidence *I*, on trace le prolongement du rayon incident : il intercepte le cercle $\mathcal{C}_1$ au point *P* ;
- On trace la projection orthogonale du point *P* sur le dioptre : il intercepte le dioptre en *H* et également le cercle $\mathcal{C}_2$ en *K*. On démontre que *IK* correspond bien au rayon réfracté. En effet :
  - *dans le trangle* $\widehat{IHP}$, *on a* $IH = IP \sin i_1$;
  - *et dans le trangle* $\widehat{IHK}$, *on a* $IH = IK \sin i_2$;
  - $Or, par\ hpothse, IP = n_1\ et\ IK = n_2$, d'où

finalement, en considérant l'égalité des deux expressions donnant *IH*, on tire :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

2ème construction du rayon réfracté en *I* : ($n_1 > n_2$)

- On construit les cercles concentriques $\mathcal{C}'_1$ *et* $\mathcal{C}'_2$, de centre *I* et de rayons $\frac{1}{n_1}$ *et* $\frac{1}{n_2}$;
- Du point d'incidence *I*, on trace le prolongement du rayon incident : il intercepte le cercle $\mathcal{C}'_1$ au point *L* ;
- On trace la tangente au cercle $\mathcal{C}'_1$ au point *L* : elle intercepte le dioptre en *M* ;
- De *M*, on mène la tangente au cercle $\mathcal{C}'_2$: soit *N* le point tangence. On démontre que *IL* correspond bien au rayon réfracté. En effet :
  - *dans le trangle* $\widehat{ILM}$, *on a* $IM \sin i_1 = IL$;
  - *et dans le trangle* $\widehat{IMN}$, *on a* $IM \sin i_2 = IN$;
  - $Or, par\ hypothse, IL = \frac{1}{n_1}\ et\ IN = \frac{1}{n_2}$, d'où

finalement, en considérant l'égalité des deux expressions donnant *IM*, on tire :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

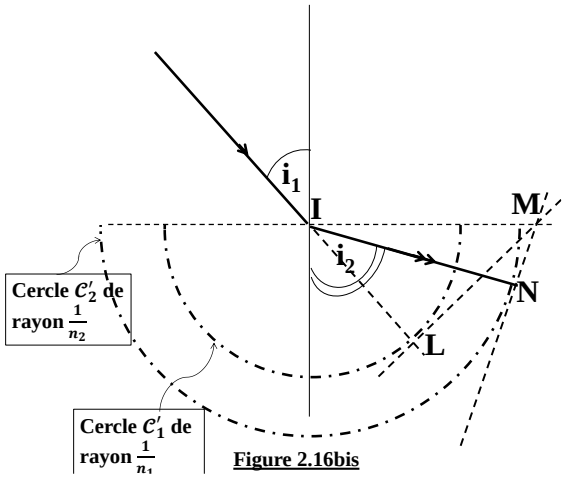


Figure 2.16bis

2. En considérant le dioptre *eau/air*, calculer l'angle de réfraction i_2 dans les cas où l'angle

d'incidence vaut $30°, 60°$. Les indices de réfraction de l'eau et de l'air valent respectivement $n_1 = 1{,}33 \approx \frac{4}{3}$ et $n_2 = 1{,}00$.

C'est une application numérique de la question précédente : loi de Descartes-Snell :

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1 \quad soit \quad i_2 = arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)$$

$$\begin{cases} si\ i_1 = 30 \Rightarrow i_2 = 41{,}81° \\ si\ i_1 = 60° \Rightarrow pas\ de\ réfraction, il\ y\ a\ il\ réflexion\ totale \end{cases}$$

On peut vérifier, effet que l'angle limite pour que la réfraction ait lieu pour le système considéré ici (dioptre eau/air) vaut :

$$i_\ell = arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad soit\ en\ application\ numérique: \quad i_\ell = 48{,}59°$$

Exercice 2_2 : décomposition de la lumière (spectrographe à prisme).

On considère une source de lumière dichromatique, c'est-à-dire, dont chacun des rayons émis, transporte deux radiations de longueurs d'ondes respectives λ_1 et λ_2. On se propose de séparer ces deux radiations à l'aide d'un prisme ABC, d'angle au sommet A=41°, placé dans l'air d'indice n_0=1.000. Le prisme est taillé dans du verre dont l'indice n dépend de la longueur d'onde de la radiation qui le traverse.

Un rayon lumineux tombe en I, sur la face AB du prisme, sous incidence i_1. Il y subit une réfraction. Ce rayon réfracté tombe en J, sur la face AC et est de nouveau réfracté vers l'extérieur (air) sous un angle qu'on notera i_2.

1. Partant des lois de Descartes et des propriétés des triangles, établir les relations entre les angles i_1, i_2, A et l'indice n du prisme (ces expressions sont appelées relations fondamentales du prisme).
   Réfraction en I : $n_0 \sin i_1 = n \sin r_1$; Réfraction en J : $n \sin r_2 = n_0 \sin i_2$; dans le triangle $\widehat{IJK}$, on a : $r_1 + r_2 + (\pi - A) = \pi$, soit $r_1 + r_2 = A$
2. Exprimer, en fonction des indices et des angles i_1, i_2 et A, la déviation totale D, subie par ce rayon.

$D = D_1 + D_2$, avec $D_1 = i_1 - r_1$ et $D_2 = i_2 - r_2$ et par suite : $D = i_1 + i_2 - A$

3. Donner la relation générale qui rend compte des variations de la déviation (dD) en fonctions des différents paramètres.
   $dD = di_1 + di_2 - dA$; pour un prisme donné (A=cte) et pour un faisceau parallèle sous une incidence i_1 donnée ($i_1 = cte$) on obtient : $dD = di_2$
4. Les deux longueurs d'onde étant légèrement différentes (de $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$), l'indice du prisme prend les valeurs n_1 =1.500 et n_2=1.502, pour λ_1 et λ_2, respectivement. Si le faisceau est envoyé sous incidence normale sur la face d'entrée. Calculer, en minutes, l'angle α que font entre eux ces deux rayons à la sortie du prisme.
   La déviation du rayon correspondant à λ_2 par rapport à celui correspondant à λ_1 s'écrit :

$$\delta D = \delta i_2 = i_2' - i_2$$

Avec i_2' et i_2 représentant les angles d'émergence respectifs du rayon pour la radiation de longueur d'onde λ_2 et pour la radiation de longueur d'onde λ_1 Les relations du prisme donnent :

$$\begin{cases} \sin i_2' = n(\lambda_2)\sin(A - r_1') \\ \sin i_2 = n(\lambda_1)\sin(A - r_1) \end{cases}$$

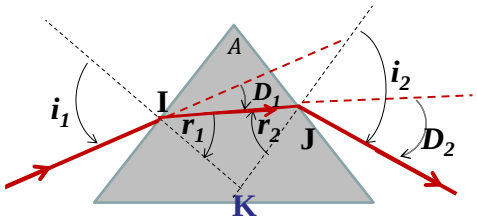
Or sous incidence normale ($i_1 = 0$), les angles de réfraction en I :

$$r_1 = r_1' = 0$$

Et par suite :

$$i_2' = arcsin[n(\lambda_2)\sin A] \quad et \quad i_2 = arcsin[n(\lambda_1)\sin A]$$

D'où finalement :



$$\delta D = arcsin[n(\lambda_2)\sin A] - arcsin[n(\lambda_1)\sin A] \quad AN: \quad \delta D = 0.43° \approx 26'$$

Remarquer que si l'angle au sommet A du prisme est supérieur à ~41°, il y a réflexion totale et que dans ce cas aucun faisceau réfracté ne serait observé.

Exercice 2_3 : la fibre optique à saut d'indice.

On considère une fibre optique de longueur $L = 1km$, à symétrie cylindrique, d'axe $z'z$, constituée d'un milieu transparent (cœur) d'indice n_c entouré par une enveloppe composée par un matériau d'indice $n_g < n_c$. Un faisceau laser

est envoyé sur la face d'entrée de la fibre, en contact avec l'air d'indice $n_0 = 1$ (figure 2_2). On appelle « angle d'acceptance » de la fibre, l'angle d'incidence i_{max} en deçà duquel le faisceau reste confiner dans la fibre.

1. Exprimer l'ouverture numérique $ON = n_0 \sin i_{max}$ de la fibre, en fonction des indices de réfraction.

Pour que le faisceau reste confiné dans la fibre, il faut qu'il subisse des réflexions sur le dioptre cœur/gaine. Autrement, le faisceau aurait traversé la gaine (réfraction) et serait sorti de la fibre.

Réflexion totale sur le dioptre cœur/gaine si l'angle de réfraction en I_1 est obtus ($\geq \frac{\pi}{2}$). Cette situation se produit si l'angle d'incidence i_1 sur le dioptre cœur/gaine en I_1 prend des valeurs telles que :

$$n_c \sin i_1 \geq n_g \sin\frac{\pi}{2} \ , \qquad soit \ \sin i_1 \geq \frac{n_g}{n_c}$$

$$Or \ \ i_1 = \frac{\pi}{2} - r_1 \ \ et \ \ n_0 \sin i = n_c \sin r_1 \quad d'où \ \ \sin r_1 = \frac{n_0}{n_c}\sin i$$

$$\sin i_1 = \cos r_1 = \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_c^2}(\sin i)^2} \geq \frac{n_g}{n_c}$$

L'angle d'incidence maximal est donc tel que : $\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_c}\sin i_{max}\right)^2} = \frac{n_g}{n_c} \implies$ $ON = n_0 \sin i_{max} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$

2. Sachant que les indices de réfraction du cœur et de la gaine de la fibre ont des valeurs très proches, montrer que ON est en première approximation donnée par : $ON \approx n_c\sqrt{2\Delta}$, où la différence d'indice relative $\Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c}$.

$$ON = \sqrt{(n_c + n_g)(n_c - n_g)} \approx \sqrt{2n_c(n_c - n_g)}$$

Ou encore :

$$ON \approx n_c\sqrt{2\frac{n_c - n_g}{n_c}} = n_c\sqrt{2\Delta}$$

3. Déterminer l'angle d'acceptance i_{max} de la fibre.

$$i_{max} = arc\sin\left(\frac{ON}{n_0}\right)$$

4. On considère deux rayons R_0 et R_m entrant dans la fibre au même instant sous incidences respectives $i_0 = 0$ et $i_m = i_{max}$. Montrer que le retard temporel subit par R_m par rapport à R_0 , à la sortie de la fibre est : $\delta t = n_c\frac{L}{c}\Delta$. Ce retard est appelé « temps de réponse de la fibre à saut d'indice multimodale ».

R_0 parcourt la fibre en une durée $t_0 = \frac{L}{v_c} = n_c\frac{L}{c}$, où c est la vitesse de la radiation dans le vide ;

R_m parcourt la fibre en une durée $t_m = \frac{L'}{v_c} = n_c\frac{L'}{c}$, où L' est la distance totale parcourue par la lumière pour aller d'un bout à l'autre de la fibre, dans le cas de l'incidence i_{max} :

$$L' = p\ I_0I_1 = \frac{pI_0H_1}{\cos r_1} = pI_0H_1\frac{n_c}{n_g} \qquad avec\ p = \frac{L}{I_0H_1} \Rightarrow L' = L\frac{n_c}{n_g}$$

Et par suite :

$$t_m = \frac{n_c^2}{n_g}\frac{L}{c}$$

D'où le retard :

$$\delta t = t_m - t_0 = \left(\frac{n_c^2}{n_g} - n_c\right)\frac{L}{c} = n_c\frac{n_c - n_g}{n_g}\frac{L}{c}$$

Soit :

$$\delta t \approx n_c\frac{L}{c}\Delta$$

5. Lorsqu'une puissance lumineuse P_0 est envoyée dans la fibre au niveau de son bout d'abscisse $z = 0$, elle s'amortie et devient P_L à l'autre bout ($z = L$). L'affaiblissement de la puissance dans la fibre, exprimée en décibels par kilomètre (dB/km) est donnée par : $\alpha = -\frac{1}{L}log\left(\frac{P_L}{P_0}\right)$ .Quelle puissance doit-on injectée à l'entrée de la fibre pour récupérer une puissance de 0,1 mW à la sortie ? On donne $\alpha = 2dB/km$ pour la longueur d'onde considérée.

$$P_0 = P_Le^{\alpha L} \qquad AN:\ P_0 = 0.12\ mW$$

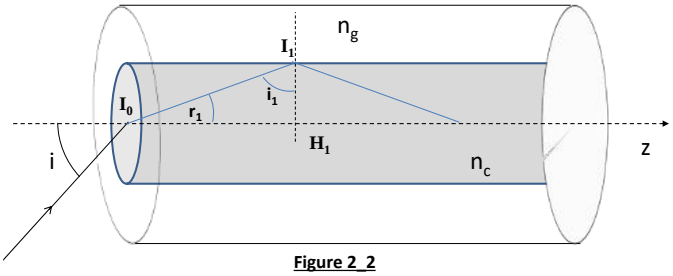


Figure 2_2