UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année Universitaire 2020-2021

Correction Examen de Mécanique du point, 1ère Session, Semestre 1, Section : L1PCSM ; Durée : 2 H

Exercice 1 : (Bases polaire et intrinsèque) (12pts)

$$\begin{cases} r = be^{-\frac{t}{\tau}} \\ et \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

1°) $t = \frac{\theta}{\omega} \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = be^{-\frac{\theta}{\omega\tau}}$ (équation polaire de la trajectoire)

2°) Les composantes radiale et orthoradiale des vecteurs vitesse et accélération.

- Composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse ;

$$\vec{v}\begin{cases} v_r = \dot{r} = -\frac{1}{\tau}be^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{r}{\tau} & composante\ radiale \\ v_\theta = r\dot{\theta} = r\,\omega & composante\ orthoradiale \end{cases}$$

- Composantes radiale et orthoradiale du vecteur accélération ;

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{r}{\tau^2} - r\omega^2 = \frac{(1-\tau^2\,\omega^2)}{\tau^2}r & composante\ radiale \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{2\omega}{\tau}r + 0 = -\frac{2\omega}{\tau}r & composante\ orthoradiale \end{cases}$$

3°) - Norme du vecteur vitesse

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\frac{r}{\tau})^2 + (r\,\omega)^2} = \frac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau}\,r$$

- Norme du vecteur accélération

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{(1-\tau^2\,\omega^2)}{\tau^2}r\right)^2 + \left(-\frac{2\omega}{\tau}r\right)^2} = \frac{(1+\tau^2\,\omega^2)}{\tau^2}\,r$$

- L'angle α que fait le vecteur vitesse avec le rayon vecteur

$\vec{v}.\overrightarrow{OA} = \vec{v}.r\vec{e}_r = \dot{r}r = -\frac{r^2}{\tau}$ (i)

$\vec{v}.\overrightarrow{OA} = \|\vec{v}\|\|\overrightarrow{OA}\|\cos\alpha = \left(\frac{r^2}{\tau}\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}\right)\cos\alpha$ (ii)

$(i) = (ii) \Rightarrow -\frac{r^2}{\tau} = \frac{r^2}{\tau}\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}\,\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}\right)$

4°) Composantes intrinsèques de l'accélération dans la base de Frénet $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$

$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} = a_t\overrightarrow{e_t} + a_n\overrightarrow{e_n} \Rightarrow \vec{a}^2 = \overrightarrow{a_t}^2 + \overrightarrow{a_n}^2 \Rightarrow {a_n}^2 = a^2 - {a_t}^2$

avec : $a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \Rightarrow a_t = -\frac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau^2}\,r$

$\Rightarrow {a_n}^2 = \left(\frac{(1+\tau^2\,\omega^2)}{\tau^2}\,r\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau^2}\,r\right)^2 = \frac{\omega^2(1+\tau^2\,\omega^2)}{\tau^2}r^2$

$\Rightarrow a_n = \frac{\omega\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau}r$

$$\vec{a}\begin{cases} a_t = -\frac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau^2}\,r & composante\ tangentielle \\ a_n = \frac{\omega\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\tau}r & composante\ normale \end{cases}$$

5°) Rayon de courbure ρ de la trajectoire

$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\omega\,\tau}\,r$

Exercice 2 : (Mouvement à accélération centrale) (**08pts**)

On désigne par C = $r^2\dot{\theta}$, la constante des aires et on pose $u = \frac{1}{r}$

On rappelle les deux formules de Binet relatives à l'accélération radiale et à la vitesse, respectivement :

$\vec{a}_r = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\vec{e}_r$; $\vec{v} = C\left[-\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\,\vec{e}_\theta\right]$

1°) Expression de la force $\vec{F}$ en fonction de *m*, *C*, μ et *r* dans le cas où la particule ponctuelle décrit une spirale d'équation : $\mathbf{r = r_o e^{-\mu\theta}}$ où μ est une constante positive :

On a : $\vec{F} = m\vec{a}$

Or : $\vec{a} = \vec{a}_r = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\vec{e}_r = \frac{-C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\vec{e}_r = \frac{-C^2}{r^3}(1+\mu^2)\vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{mC^2}{r^3}(1+\mu^2)\vec{e}_r$

2°) $E_p(r) = \frac{A}{r^2} + B$

$E_p(r) = -\int F\,dr + cte$ $\Rightarrow$ $E_p(r) = \int \frac{mC^2}{r^3}(1+\mu^2)\,dr + cte$

$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{mC^2}{2\,r^2}(1+\mu^2) + cte$

Or : $E_p(r = r_o) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2) + cte \Rightarrow cte = \frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2)$

d'où : $E_p(r) = -\frac{mC^2}{2\,r^2}(1+\mu^2) + \frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2)$

Par identification : $A = -\frac{mC^2}{2}(1+\mu^2)$ et $B = cte = \frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2)$

3°) Expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de *m*, *C*, μ et *r*.

$E_c = \frac{mv^2}{2}$

avec : $v^2 = C^2\left[\left(-\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = C^2\left[\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = C^2\left(\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{C^2}{r^2}(1+\mu^2)$

$\Rightarrow E_c = \frac{mC^2}{2\,r^2}(1+\mu^2)$

4°) Energie mécanique totale E_m de la particule M.

$E_m = E_c + E_p(r) \Rightarrow E_m = \frac{mC^2}{2\,r^2}(1+\mu^2) - \frac{mC^2}{2\,r^2}(1+\mu^2) + \frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2)$

$\Rightarrow E_m = \frac{mC^2}{2\,r_o^2}(1+\mu^2)$

Conclusion : *l'énergie mécanique totale est une constante ; il y'a une conservation de l'énergie mécanique du mouvement de la particule M (mvt à accélération centrale).*