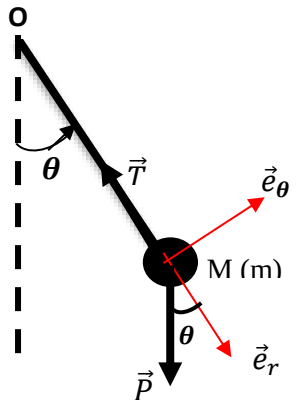
Correction Série n°3, TD mécanique du point matériel (2023-2024)

Exercice 1 : Pendule simple - Lois de la dynamique (PFD ; TEC ; TMC)

1°) RFD



$$OM = l = Cte$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgcos\theta - T = m(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2) \\ -mgsin\theta + 0 = m(2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & (1) \\ -mgsin\theta = ml\ddot{\theta} & (2) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0}$$

Rq: Equa. Diff. non liné. Homogène

Pour les faibles oscillations : $\boldsymbol{sin\theta \cong \theta}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0} \quad : \boldsymbol{E.D.L.H\ de\ pulsation}\ \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

2°) Le T.M.C :

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum \vec{M}(\vec{F})$$

- $\vec{L}_{/o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = l.\vec{e}_r \wedge m(v_r.\vec{e}_r + v_\theta.\vec{e}_\theta)$ $\quad avec \begin{cases} v_\theta = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ v_r = 0 \end{cases}$

$$= ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \qquad avec\ \vec{e}_z = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

$\vec{M}_{/o}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (l\vec{e}_r) \wedge (mgcos\theta\vec{e}_r - mgsin\theta\vec{e}_\theta) = mgsin\theta.\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -mgsin\theta\vec{e}_z$

- $\vec{M}_{/o}(\vec{T}) = OM.\vec{e}_r \wedge (-T\vec{e}_r) = \vec{0}$

D'après le T.M.C : $ml^2\ddot{\theta} = -mgsin\theta \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0}$

3°) Le T.EC :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

$$W(\vec{P}) = -mgh = -mgl(1 - cos\theta) \quad \text{car} \quad h = l(1 - cos\theta)$$

$$W(\vec{T}) = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gl(cos\theta - 1) + v_o^2 \qquad avec\ v = l\omega = l\dot{\theta}$$

$$l\dot{\theta}^2 = 2g(cos\theta - 1) + \frac{v_o^2}{l}$$

$\frac{d}{dt}(l\dot{\theta}^2) = \frac{d}{dt}\left(2gcos\theta - 2g + \frac{v_o^2}{l}\right)$ c.à.d. $2l\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\boldsymbol{2g}\dot{\theta}sin\theta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0}$

Exercice 2 : Mouvement à force centrale-Energie

1°) Démontrons que la force peut s'écrire sous la forme : $\vec{\mathrm{F}} = -m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{1}{r^3}\vec{e}_r$

Où $C = r^2\dot{\theta}$ est la constante des aires

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$; $\vec{\mathrm{V}}(M) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{\mathrm{V}}}\right)$

$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{V} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\vec{V}\right\| \times \cos\alpha \implies r \times \dot{r} = r \times \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \times \cos\alpha \implies \dot{r}^2 = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)\cos^2\alpha$

$\implies \dot{r}^2 - \dot{r}^2\cos^2\alpha = r^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha \implies \dot{r}^2\sin^2\alpha = \frac{C^2}{r^2}(1-\sin^2\alpha) \implies \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{C^2}{r^2\sin^2\alpha}$

$\implies \frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{C^2}{r^2\sin^2\alpha}\right) \implies 2\dot{r}\ddot{r} - 2\dot{r}\frac{C^2}{r^3} = -2\dot{r}\frac{C^2}{r^3\sin^2\alpha} \implies \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^3}$

On a : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r \implies \vec{a} = \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right)\vec{e}_r \implies \vec{a} = -\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^3}\vec{e}_r$

Or $\vec{\mathrm{F}} = m\vec{a} \implies \vec{\mathrm{F}} = -m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^3}\vec{e}_r$

2°) Déterminons l'équation polaire de la trajectoire de M :

$\dot{r}^2\sin^2\alpha = \frac{C^2}{r^2}(1-\sin^2\alpha) \implies \dot{r}^2 = \frac{C^2}{r^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \implies \dot{r}^2 = \frac{A^2}{r^2}$ avec : $A^2 = C^2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ où $A > 0$

$\implies \dot{r} = \frac{A}{r} \implies \frac{dr}{dt} = \frac{A}{r} \implies r\,dr = A\,dt \implies \int r\,dr = \int A\,dt \implies \frac{1}{2}r^2 = At + B$

$\implies r^2 = 2(At+B) \implies r = \sqrt{2(At+B)}$

On a : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \implies d\theta = \frac{C}{2(At+B)}dt \implies \int d\theta = \int\frac{C}{2(At+B)}dt \implies \theta = \frac{C}{2A}\ln(At+B) + D$

$\implies e^{\frac{2A}{C}\theta} = K(At+B)$ avec : $K = e^{\frac{2A}{C}D}$

$\implies e^{\frac{2A}{C}\theta} = K\frac{1}{2}r^2 \implies r^2 = \frac{2}{K}e^{\frac{2A}{C}\theta} \implies r = K_1 e^{\beta\theta}$ où : $K_1 = \sqrt{\frac{2}{K}}$ et $\beta = \frac{A}{C}$

Avec : $\dot{r} = \beta K_1\dot{\theta}e^{\beta\theta}$

Détermination des constantes K_1 et β :

A t = 0s , $r(0) = r_o$; $\dot{r}(0) = \dot{r}_o$ et , $\theta(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_o$

$\implies r_o = K_1$ et $\dot{r}_o = \beta K_1\dot{\theta}_o \implies \beta = \frac{\dot{r}_o}{r_o\dot{\theta}_o}$ d'où : $r = r_o e^{\frac{\dot{r}_o}{r_o\dot{\theta}_o}\theta}$ c'est l'équation d'une spirale

NB : si $\dot{r}_o = 0$ alors $r = r_o \implies$ c'est un cercle de rayon r_o

3°) Energie totale de la particule M

$E_t = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ (énergie cinétique) et $E_p = -\int\vec{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{dr} + cste$ (énergie potentielle)

$E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{C^2}{r^2\sin^2\alpha} - \frac{C^2}{r^2} + r^2\frac{C^2}{r^4}\right) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{C^2}{r^2\sin^2\alpha}\right) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{C}{sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^2}$

$E_p = m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\int\frac{1}{r^3}dr + cste \Rightarrow E_p = -\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^2} + cste$

D'où :

$E_t = \frac{1}{2}m\left(\frac{C}{sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2}m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2\frac{1}{r^2} + cste \Rightarrow E_t = cste$ (l'énergie totale est une constante)

Exercice 3 : Forces d'inertie

$$\overrightarrow{OM} = 2bcos\varphi\vec{e}_\rho$$

1°) Vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}(M)$ dans le repère $\mathfrak{R}$.

$\vec{\mathrm{V}}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \implies \vec{\mathrm{V}}(M) = \frac{d}{dt}\left(2bcos\varphi\vec{e}_\rho\right) \implies \vec{\mathrm{V}}(M) = -2b\dot{\varphi}sin\varphi\vec{e}_\rho + 2bcos\varphi\dot{\vec{e}}_\rho$

$\implies \vec{\mathrm{V}}(M) = -2b\dot{\varphi}sin\varphi\,\vec{e}_\rho + 2b\dot{\varphi}cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \implies \vec{\mathrm{V}}(M) = 2b\dot{\varphi}\left(-sin\varphi\,\vec{e}_\rho + cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)$

• $\vec{e}_t$? $\vec{e}_t = \frac{\vec{\mathrm{V}}(M)}{\left\|\vec{\mathrm{V}}(M)\right\|} \implies \vec{e}_t = -sin\varphi\,\vec{e}_\rho + cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$

• $\vec{e}_n$? $\vec{e}_n = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_t \implies \vec{e}_n = -cos\varphi\,\vec{e}_\rho - sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$

2°) Vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ du repère $\mathfrak{R}_1$ par rapport au repère $\mathfrak{R}$: $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$

3°) Vecteurs accélérations relative $\vec{a}_r(M)$, d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{a}_c(M)$.
O = O_1 (les deux points sont confondus)

L'accélération d'entraînement est : $\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$

Avec : $\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow \quad \vec{a}_e = \ddot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_e = -2b\dot{\varphi}^2 cos\varphi \vec{e}_\rho + 2b\ddot{\varphi}cos\varphi\ \vec{e}_\varphi$

L'accélération relative : $\vec{a}_r = \frac{d\,\vec{V}_r}{dt}_{/\Re 1}$ avec : $\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\Re 1} = -2b\dot{\varphi}sin\varphi\vec{e}_\rho$

$\vec{a}_r = -2b(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi)\vec{e}_\rho$

L'accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = -4b\dot{\varphi}^2 sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$

4°) Bilan de toutes les forces appliquées à M puis leurs expressions dans $\Re_1$.

$\vec{F}$ (force de rappel) ; $\vec{P}$ (poids de l'anneau) ; $\vec{R}$ (réaction de la tige sur l'anneau) ; $\vec{F}_{ie}$ (force d'inertie d'entraînement) ; $\vec{F}_{ic}$ (force d'inertie de Coriolis)

$\vec{F} = -k(\rho - b)\vec{e}_\rho = -k(2bcos\varphi - b)\vec{e}_\rho$; $\quad \vec{P} = -mg\vec{e}_z$;

$\vec{R} = R_n\vec{e}_n + R_z\vec{e}_z = \left(-R_n cos\varphi\ \vec{e}_\rho - R_n sin\varphi\ \vec{e}_\varphi\right) + R_z\vec{e}_z$;

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = 2bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi\vec{e}_\rho - 2bm\ddot{\varphi}cos\varphi\ \vec{e}_\varphi$; $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = 4bm\dot{\varphi}^2 sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$

5°) Démontrons que l'équation différentielle du mouvement de M, est : $\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1 - 2\cos\varphi)\sin\varphi = 0$

D'après le PFD, dans le repère $\Re_1$, on a : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}_r$

$$(-k(2bcos\varphi - b) - R_n cos\varphi + 2bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi)\vec{e}_\rho + (-R_n sin\varphi - 2bm\ddot{\varphi}cos\varphi + 4bm\dot{\varphi}^2 sin\varphi\ )\vec{e}_\varphi + (-mg + R_z)\vec{e}_z = -2bm(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi)\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(2bcos\varphi - b) - R_n cos\varphi + 2bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi = -2bm(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2 cos\varphi) \quad (1) \\ -R_n sin\varphi - 2bm\ddot{\varphi}cos\varphi + 4bm\dot{\varphi}^2 sin\varphi = 0 \qquad (2) \\ -mg + R_z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow\ R_n = -2bm\ddot{\varphi}\frac{cos\varphi}{sin\varphi} + 4bm\dot{\varphi}^2$ (4)

(4) dans (1)

$\Rightarrow -k(2bcos\varphi - b) + 2bm\ddot{\varphi}\frac{cos^2\varphi}{sin\varphi} - 4bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi + 2bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi = -2bm\ddot{\varphi}sin\varphi - 2bm\dot{\varphi}^2 cos\varphi$

$\Rightarrow -k(2bcos\varphi - b) + 2bm\ddot{\varphi}\frac{cos^2\varphi}{sin\varphi} = -2bm\ddot{\varphi}sin\varphi$

$\Rightarrow -k(2bcos\varphi - b)sin\varphi + 2bm\ddot{\varphi}cos^2\varphi = -2bm\ddot{\varphi}sin^2\varphi \Rightarrow -k(2bcos\varphi - b)sin\varphi + 2bm\ddot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}(2cos\varphi - 1)sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1 - 2cos\varphi)sin\varphi = 0$ (équation différentielle)

Pour des angles très faibles, on a : $cos\varphi \simeq 1$ et $sin\varphi \simeq \varphi$

$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}\varphi = 0$

6°) Composantes de la réaction $\vec{R}$ du support sur le point M suivant $\vec{e}_n$ et $\vec{k}$

(4) $\Rightarrow\ R_n = -2bm\ddot{\varphi}\frac{cos\varphi}{sin\varphi} + 4bm\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow\ R_n = -kb(2cos\varphi - 1)cos\varphi + 4bm\dot{\varphi}^2$

(3) $\Rightarrow\ R_z = mg$

