Correction Série N°2, TD mécanique du point

Exercice 1 :

$\overrightarrow{OM} = (2t-2)\vec{e}_x + (t^2-2t+3)\vec{e}_y$; $\begin{cases} x = (2t-2) \\ y = (t^2-2t+3) \end{cases}$

1°) Equation de la trajectoire

$x = 2t-2 \Rightarrow t = \frac{x}{2}+1 \Rightarrow y = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}+1\right)+3 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{4}+2 \Rightarrow$ C'est une courbe parabolique (ouverte)

2°) Les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse $\vec{V}(M)$ et accélération $\vec{a}(M)$:

$\overrightarrow{OM}(t): \begin{cases} x = (2t-2) \\ y = (t^2-2t+3) \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = 2 \\ V_y = 2t-2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 2 \end{cases}$

3°) Composantes de $\vec{a}$ dans la base de Frenet :

- Composante tangentielle a_t :
  $a_t = \frac{d}{dt}\|\vec{V}\| = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4t^2-8t+8}\right) = \frac{2(t-1)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$
- Composante normale a_n :

$\|\vec{a}\| = 2\ m.s^{-2}$

Or $\|\vec{a}\|^2 = a_n^2 + a_t^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2-a_t^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2(t-1)}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)^2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

- Rayon de courbure : ρ

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\|\vec{V}\|^2}{a_n} = 2(t^2-2t+2)^{\frac{3}{2}}$$

- **Remarque :** on peut utiliser, de même, la formule : $\rho = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{a}\wedge\vec{V}\|}$

Exercice 2 : Mouvement curviligne – Bases polaires

$r(\theta) = \frac{1}{2}r_o(1+cos\theta)$ où r_o est une longueur donnée, $0 \le \theta \le \pi$ et $\dot{\theta} > 0$

1°) Vérifions que : $\vec{V}(M) = r_o\dot{\theta}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right]$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \Rightarrow \vec{V}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $\dot{r} = -\frac{1}{2}r_o\dot{\theta}sin\theta$

$$\vec{V}(M) = -\frac{1}{2}r_o\dot{\theta}sin\theta\ \vec{e}_r + \frac{1}{2}r_o\dot{\theta}(1+cos\theta)\vec{e}_\theta$$

On sait que : $cos\theta = 2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1+cos\theta) = cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

et $sin2\theta = 2sin\theta cos\theta \Rightarrow sin\theta = 2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d'où : $\vec{V}(M) = r_o\dot{\theta}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r + cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right]$

2°) ▶ Module de $\vec{V}$: $\|\vec{V}\| = r_o\dot{\theta}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ car $0 \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\pi}{2}$

▶ Vecteur unitaire $\vec{\tau}$: $\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow \vec{\tau} = -sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r + cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta$

▶ l'angle $(\widehat{\vec{e}_\theta, \vec{\tau}})$: $\vec{\tau}\cdot\vec{e}_\theta = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow (\widehat{\vec{e}_\theta, \vec{\tau}}) = \frac{\theta}{2}$

3°) ▶ Composante tangentielle a_τ :

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\|\vec{V}\| = r_o\ddot{\theta}cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2}r_o\dot{\theta}^2 sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

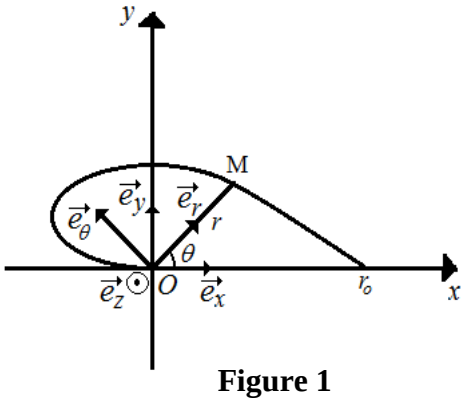


Figure 1

▶ Composante normale a_n :

On a : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\|\vec{V}\|\vec{\tau} + \|\vec{V}\|\frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} \Rightarrow a_n\vec{n} = \|\vec{V}\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ (par identification)

$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = -\frac{1}{2}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta - \frac{1}{2}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta - cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r = \frac{3}{2}\left(-cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right)$

$\Rightarrow a_n\vec{n} = \frac{3}{2}r_o\dot{\theta}^2 cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right)$

d'où : $a_n = \frac{3}{2}r_o\dot{\theta}^2 cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\vec{n} = -cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta$

▶ le rayon de courbure ρ :

$\rho = \frac{\|\vec{V}\|^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \frac{2}{3}r_o cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

4°) L'abscisse curviligne $S(\theta)$: $\|\vec{V}\| = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = \|\vec{V}\|dt \Rightarrow dS = \left(r_o\frac{d\theta}{dt}cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)dt$

$\Rightarrow dS = r_o cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \Rightarrow S = r_o\int cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta + Cte \Rightarrow S(\theta) = 2\,r_o sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + Cte$

Or $S(\theta = 0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + Cte \Rightarrow Cte = 0 \Rightarrow S(\theta) = 2\,r_o sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

▶ Longueur totale de la trajectoire : $L = S(\pi) - S(0) = 2\,r_o$

Exercice 3 : Composition de mouvements – Changement de repère

$\overrightarrow{O_1M} = r\vec{e}_r$

1°) ‣ Expression de la vitesse relative $\vec{V}_r(M)$:

$\vec{V}_r(M) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\Big|_{R_1} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{V}_r(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\Omega\vec{e}_\theta$

‣ Expression de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$:

$\vec{V}_e(M) = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\Big|_R + (\dot{\varphi}\vec{e}_z)\wedge\overrightarrow{O_1M} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\Big|_R + (\omega\vec{e}_z)\wedge\overrightarrow{O_1M} \Rightarrow \vec{V}_e(M) = r\omega\vec{e}_\theta + \alpha\vec{e}_z$

‣ Expression de la vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$: $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M)$

$\Rightarrow \vec{V}_a(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r(\omega + \Omega)\vec{e}_\theta + \alpha\vec{e}_z$

2°) ‣ Expression de l'accélération relative $\vec{a}_r(M)$:

$\vec{a}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\Big|_{R_1} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a}_r(M) = (\ddot{r} - r\Omega^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\Omega\vec{e}_\theta$

‣ Expression de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$:

$\vec{a}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big|_R + (\dot{\omega}\vec{e}_z)\wedge\overrightarrow{O_1M} + (\omega\vec{e}_z)\wedge\left(\omega\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$ avec $\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\Big|_R = \vec{O}$ et $\dot{\omega}\vec{e}_z = \vec{O}$

$\Rightarrow \vec{a}_e(M) = (\omega\vec{e}_z)\wedge\left(\omega\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{O_1M}\right) \Rightarrow \vec{a}_e(M) = (\omega\vec{e}_z)\wedge(r\omega\vec{e}_\theta) \Rightarrow \vec{a}_e(M) = -r\omega^2\vec{e}_r$

‣ Expression de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c(M)$:

$\vec{a}_c(M) = 2(\omega\vec{e}_z)\wedge\vec{V}_r(M) = 2\,(\omega\vec{e}_z)\wedge(\dot{r}\vec{e}_r + r\Omega\vec{e}_\theta) \Rightarrow \vec{a}_c(M) = -2r\omega\Omega\vec{e}_r + 2\dot{r}\omega\vec{e}_\theta$

‣ Expression de l'accélération absolue $\vec{a}_a(M)$: $\vec{a}_a(M) = \vec{a}_e(M) + \vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M)$

$\vec{a}_a(M) = (\ddot{r} - r(\omega + \Omega)^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}(\omega + \Omega)\vec{e}_\theta$

