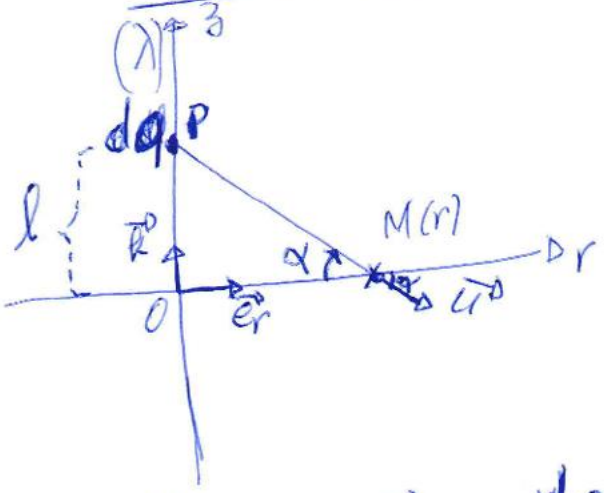
2022-2023

# Correction de la série n°1
# TD d'Electricité 1, Semestre 1

**NB :** * Seuls les exercices 2, 3, 4 et 5 sont corrigés
* Les TPE de chaque exercice, sont à faire par l'étudiant(e).

## Exercice 2 :




1) Déterminons le champ électrostatique $\vec{E}(r)$.

* Rappel : - l'axe (Or) est sur le plan (xOy) : $r = (x^2+y^2)^{1/2}$
- les vecteurs unitaires $\vec{k}$ et $\vec{e_r}$ sont perpendiculaires

$$d\vec{E}(r) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{PM^2} \quad \text{avec :} \quad \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} \text{ (Vecteur unitaire)}$$

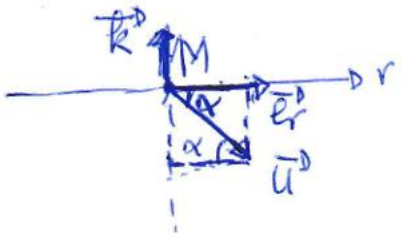
et dq est la charge élémentaire se trouvant en un point P de l'axe (z'Oz).

On a : $dq = \lambda\, dl$ (dl : élément de longueur contenant dq)

$$\tan\alpha = \frac{l}{OM} \Rightarrow l = OM.\tan\alpha \Rightarrow l = r.\tan\alpha \text{ (avec : } r = OM)$$

$$\Rightarrow dl = r\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{OM}{PM} \Rightarrow PM = \frac{OM}{\cos\alpha} \Rightarrow PM^2 = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}$$




la projection du vecteur $\vec{u}$ suivant $\vec{e_r}$ et $\vec{k}$, donne :

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{k}$$

D'où :

$$d\vec{E}(r) = \frac{\lambda . r . d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\left(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{k}\right)d\alpha .$$

or $\vec{E}(r) = \int d\vec{E}(r)$.

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{k}\right)d\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin\alpha\,\vec{e_r} + \cos\alpha\,\vec{k}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\vec{e_r} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\vec{k} - \left(\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}\vec{e_r} + \underbrace{\cos\left(-\pi/2\right)}_{0}\vec{k}\right)\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\vec{e_r} + \vec{e_r}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(2\,\vec{e_r}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}} \quad \text{ou bien :} \quad \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda\,\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

2) Potentiel électrostatique $V(r)$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ (ou bien : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$)

$\Rightarrow \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -dV \Rightarrow dV = -\vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$

$\Rightarrow dV = -\vec{E}(r) \cdot dr\,\vec{e}_r \Rightarrow dV = -\left(\frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\varepsilon_0 r}\right) \cdot dr\,\vec{e}_r$

$\Rightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$

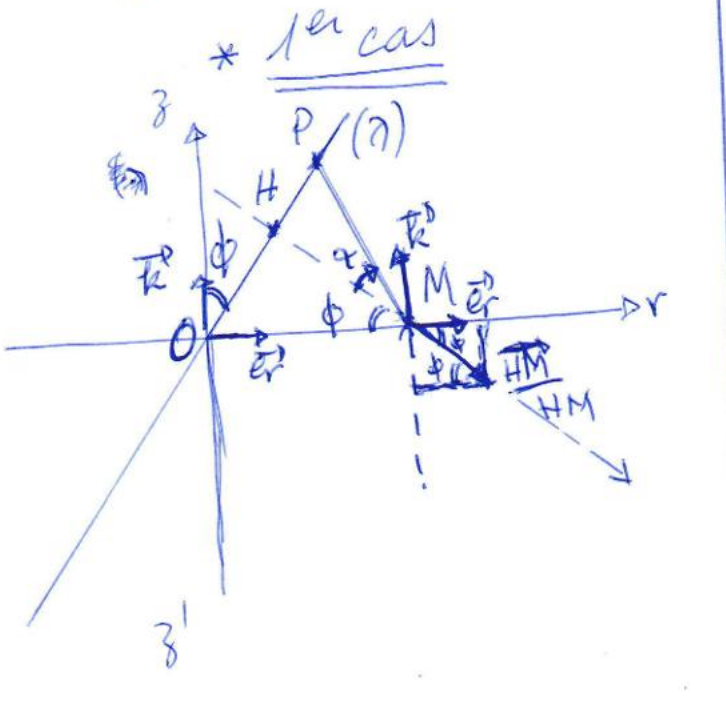
$\Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} + C^{te}$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + C^{te}}$ $\left(\text{ou bien : } V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r}\right) + C^{te}\right)$

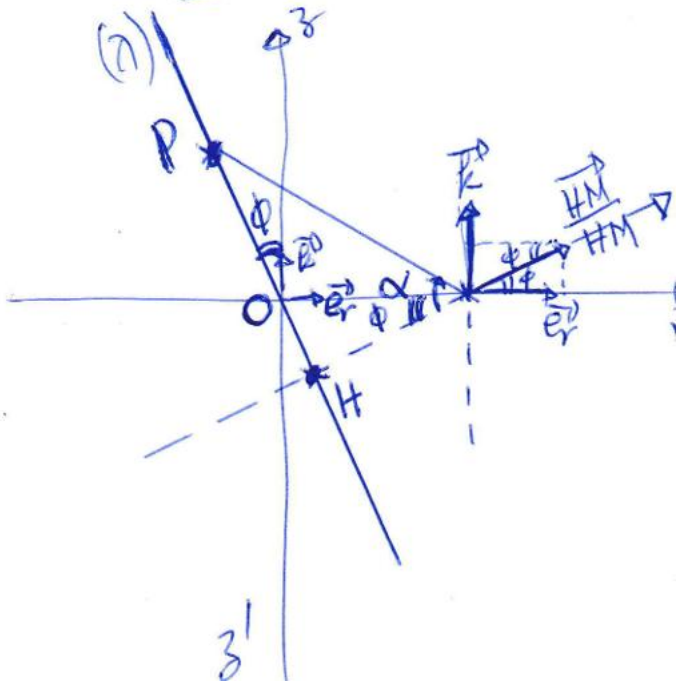
3) Champ électrostatique pour un fil infini incliné d'un angle $\phi$ par rapport à l'axe $(z'oz)$.

Il y'a 2 cas à utiliser :

* 1er cas




* 2ème cas :



Pour déterminer le champ électrostatique au point M(r), on peut utiliser l'expression trouvée à la question 1°).

Pour cela, on trace un axe perpendiculairement au fil de densité linéique $\lambda$ et qui passe au point M (voir l'axe (HM)).

L'angle $\alpha$, c'est de l'axe de référence (HM) à l'axe (PM); ce qui implique que les bornes d'intégration restent inchangées:

$-\frac{\pi}{2}$ (borne inférieure) et $\frac{\pi}{2}$ (borne supérieure).

on a donc : $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 HM} \cdot \frac{\overrightarrow{HM}}{HM}$

* 1er cas :

Du triangle OHM rectangle en H, on obtient :

$\cos\phi = \frac{HM}{OM} \Rightarrow \cos\phi = \frac{HM}{r}$

$\Rightarrow HM = r\cos\phi$

$\frac{\overrightarrow{HM}}{HM} = \cos\phi\,\vec{e}_r - \sin\phi\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r\cos\phi}\left(\cos\phi\,\vec{e}_r - \sin\phi\,\vec{k}\right)$

* 2ème cas :

Du triangle OHM rectangle en H, on obtient :

$\cos\phi = \frac{HM}{OM} \Rightarrow \cos\phi = \frac{HM}{r}$

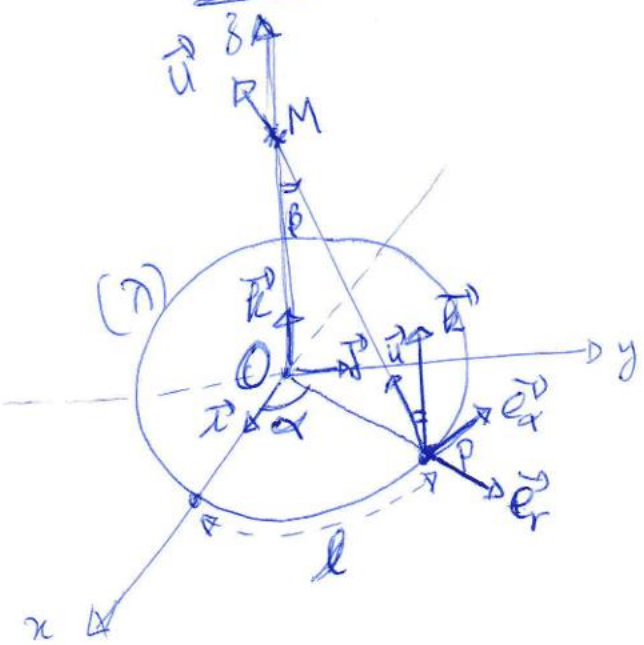
$\Rightarrow HM = r\cos\phi$

$\frac{\overrightarrow{HM}}{HM} = \cos\phi\,\vec{e}_r + \sin\phi\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r\cos\phi}\left(\cos\phi\,\vec{e}_r + \sin\phi\,\vec{k}\right)$

⊛ Remarque : lorsque $\phi = 0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

## Exercice 3 :




(ici $z > 0$)

1) Déterminons le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ au point M.

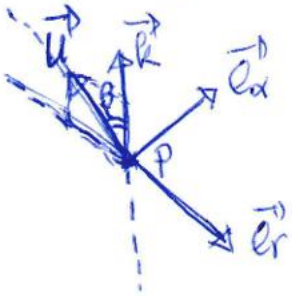
* $\alpha$ : angle, à partir d'un point de référence appartenant à l'axe (ox), qui nous permet de repérer le point P sur le fil
* $\beta$ : l'angle au sommet de M.
* $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\alpha}$ sont des vecteurs unitaires et contenus dans le plan (xOy) et perpendiculaires : $\vec{e_\alpha}$ est tangent au fil en un point P et $\vec{e_r} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|} = \frac{\vec{OP}}{OP}$ et $\vec{e_\alpha} = \frac{d\vec{e_r}}{d\alpha}$ (voir cours de mécanique du point)

$$\vec{e_r} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

$$d\vec{E}(z) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \cdot \frac{\vec{PM}}{PM} \quad \text{avec : } \frac{\vec{PM}}{PM} = \vec{u} \text{ et } dq = \lambda\, dl = \lambda R\, d\alpha$$

$$PM^2 = PO^2 + OM^2 \quad (\text{triangle } (OMP) \text{ rectangle en } O)$$
$$= R^2 + z^2$$

$\vec{u}$ ??




$$\vec{u} = \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta\,\vec{e_r}$$
$$= \cos\beta\,\vec{k} - \sin\beta\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow d\vec{E}(z) = \frac{\lambda R\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)}\left(-\sin\beta\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) + \cos\beta\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} \int_0^{2\pi} \left(-\sin\beta(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}) + \cos\beta\vec{k}\right) d\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} \left[-\sin\beta(\sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j}) + \cos\beta\vec{k}(\alpha)\right]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} \left[-\sin\beta\underbrace{\left\{\sin 2\pi\vec{i} - \cos 2\pi\vec{j} - (\sin 0\vec{i} - \cos 0\vec{j})\right\}}_{\vec{0}} + \cos\beta\vec{k}(2\pi)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)} \left(2\pi\cos\beta\vec{k}\right)$$

avec : $\cos\beta = \frac{OM}{PM} = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$ $(z>0)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{\lambda(2\pi R)z}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

(on peut remarquer que : $\lambda 2\pi R = Q$ (charge totale du fil))

on obtient : $\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}}$ → (après simplification des $2\pi$)

$$\boxed{\vec{E}(0) = \vec{0}}$$

* Lorsque $z < 0$, on peut faire correspondre, à partir de l'expression du champ électrostatique obtenue,

$$\begin{cases} z \longrightarrow -z \\ \vec{k} \longrightarrow -\vec{k} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (\text{pour } z<0)$$

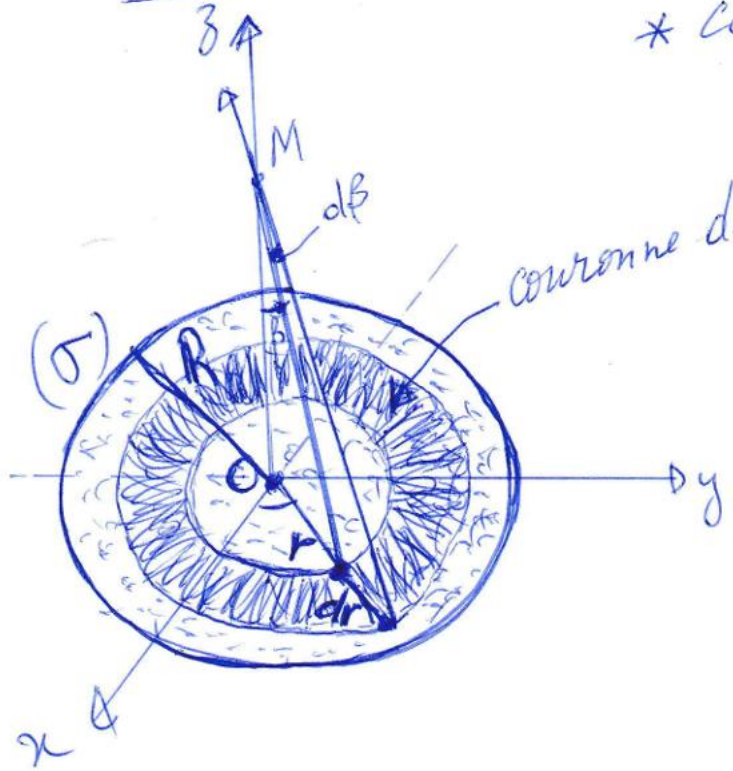
2) quelques indications :

* $M \to O \quad (z=0)$

* $\beta \to \frac{\pi}{2}$

* bornes d'intégration : 0 (borne inférieure) et $\pi$ (borne supérieure)

## Exercice 4 :




* cas où $z > 0$

couronne $dS = 2\pi r\,dr$ ; comprise entre le cercle de rayon r et celui de rayon $(r+dr)$.

1° Détermination du champ électrostatique $\vec{E}(z)$ à l'aide de l'angle solide.

$$\Rightarrow d\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \vec{k} \quad \text{où } d\Omega = 2\pi \sin\beta d\beta \text{ est l'angle solide élémentaire}$$

(Formule qui peut être démontrée !!!)

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\sigma 2\pi \sin\beta d\beta \vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\beta d\beta \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^{\beta_{max}} \sin\beta d\beta \vec{k}$$

avec : $\beta_{max}$ étant l'angle maximal qui correspond à $r = R$.

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[-\cos\beta\right]_0^{\beta_{max}} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \cos\beta_{max}\right) \vec{k}$$

avec : $\cos\beta_{max} = \frac{OM}{\sqrt{R^2 + OM^2}} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{k}}$$

* Pour le cas $z < 0$, on a : $\boxed{\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \vec{k}}$

2) Potentiel électrostatique $V(z)$

$dV = -\vec{E}(z) \cdot d\vec{z}$ (ici le $d\vec{r} = d\vec{z}$).

$= -\vec{E}(z) \cdot dz\,\vec{k}$

* Cas où $z > 0$ (seul cas qui est traité)

$$dV = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} \cdot dz\,\vec{k}$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)dz$$

$$\Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)dz + C^{te}$$

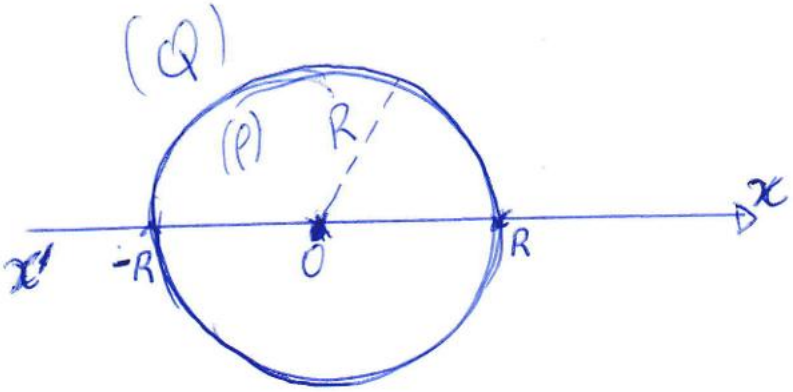
$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\int dz - \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\} + C^{te}$$

$$\boxed{V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(z - \sqrt{R^2+z^2}\right) + C^{te}}$$

3) Quelques indications :

* déterminer $V(z)$ pour le cas $z < 0$ ;
* réécrire les expressions de $V(z)$, au moyen des expressions conjuguées, puis utiliser le principe de Coulomb pour déterminer les constantes
* tracer les courbes (continuité, dérivée, asymptote etc).

# Exercice 5 :




1) Détermination du champ électrostatique $E(x)$ en $M(x)$.

On a d'abord : $Q = \rho . V$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \rho . \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}}$$

* D'après le théorème de GAUSS :

$$E . S_G = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ où $S_G$ est une surface de GAUSS et $\Sigma Q_{int}$ la charge délimitée par $S_G$.

* Plusieurs cas à considérer selon les valeur de $x$ :

- 1er cas : $|x| \leq R$ c-à-d $-R \leq x \leq R$

$$\Sigma Q_{int} = \rho V_{int} \quad \text{avec} : V_{int} = \frac{4}{3}\pi |x|^3 \quad \text{et} \quad S_G = 4\pi x^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi |x|^3}{4\pi \varepsilon_0 x^2} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{|x|^3}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \cdot \frac{|x|^3}{x^2}}$$

* Si $x > 0 \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^3} \cdot x} \Rightarrow \boxed{\vec{E_1} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} x \vec{\imath}}$

* Si $x < 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E_2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} x \vec{\imath}}$

(Pour retrouver cette expression, il faut prêter une attention particulière au sens de $\vec{S_G}$)

- 2ème cas : $|x| > R$ c-à-d : $\begin{cases} x > R \\ \text{ou} \\ x < -R \end{cases}$

$\sum Q_{int} = Q$ et $S_G = 4\pi x^2$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$$

* Si $x > R \Rightarrow \boxed{\vec{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}}$

* Si $x < -R \Rightarrow \boxed{\vec{E}_4 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{i}}$

2/ Déterminons le potentiel électrostatique $V(x)$.

On sait que : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

Puisque $\vec{E}$ ne dépend que de la variable $x$, on a :

$\vec{E}.d\vec{x} = -dV \Rightarrow dV = -\vec{E}.d\vec{x}$

$\Rightarrow -\vec{E}.(dx\vec{i}) = dV$ d'où : $dV = -E\,dx$.

- 1er cas : $|x| \leq R$.

* Si $x > 0$ c-à-d : $0 \leq x \leq R$.

$$dV_1 = -\frac{Q\,x}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dx \Rightarrow V_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int x\,dx + C_1^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}x^2 + C_1^{te}}$$

* Si $x < 0$, c-à-d : $-R \leq x \leq 0$

$$dV_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} x\, dx \Rightarrow \boxed{V_2 = -\frac{Q.x^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + C_2^{te}}$$

- 2ème Cas : $|x| > R$

* Si $x > R$

$$dV_3 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx \Rightarrow V_3 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{x^2} + C_3^{te}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} + C_3^{te}}$$

* Si $x < -R$

$$dV_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx \Rightarrow \boxed{V_4 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 x} + C_4^{te}}$$

Détermination des constantes $C_1^{te}$, $C_2^{te}$, $C_3^{te}$ et $C_4^{te}$ :

* Origine du potentiel électrostatique en $x = 0$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1(x=0) = 0 \\ V_2(x=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1^{te} = C_2^{te} = 0$$

D'où les expressions de $V_1$ et $V_2$ en fonction de $x$, deviennent :

$$\boxed{V_1 = \frac{-Q.x^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_2 = \frac{-Q.x^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

* Continuité du potentiel en $x = R$ :

$$\Rightarrow V_1(R) = V_3(R) \Rightarrow -\frac{Q R^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + C_3^{te}$$

$$\Rightarrow C_3^{te} = \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{C_3^{te} = -\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

d'où : $\boxed{V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x} - \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2R}\right)}$

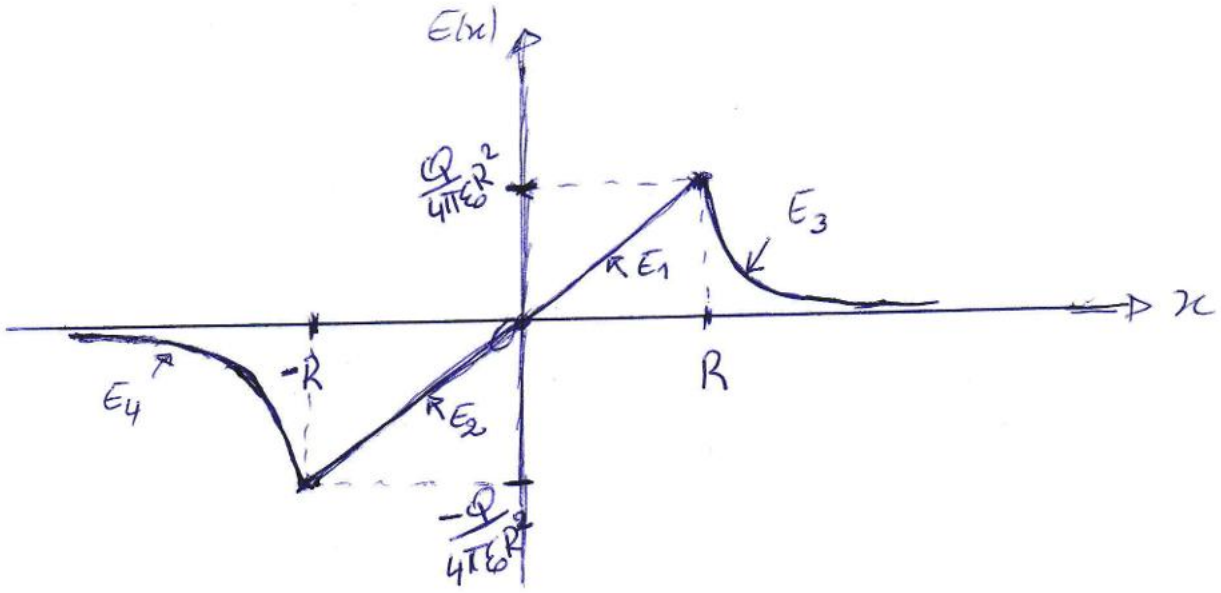
* Continuité du potentiel en $x = -R$ :

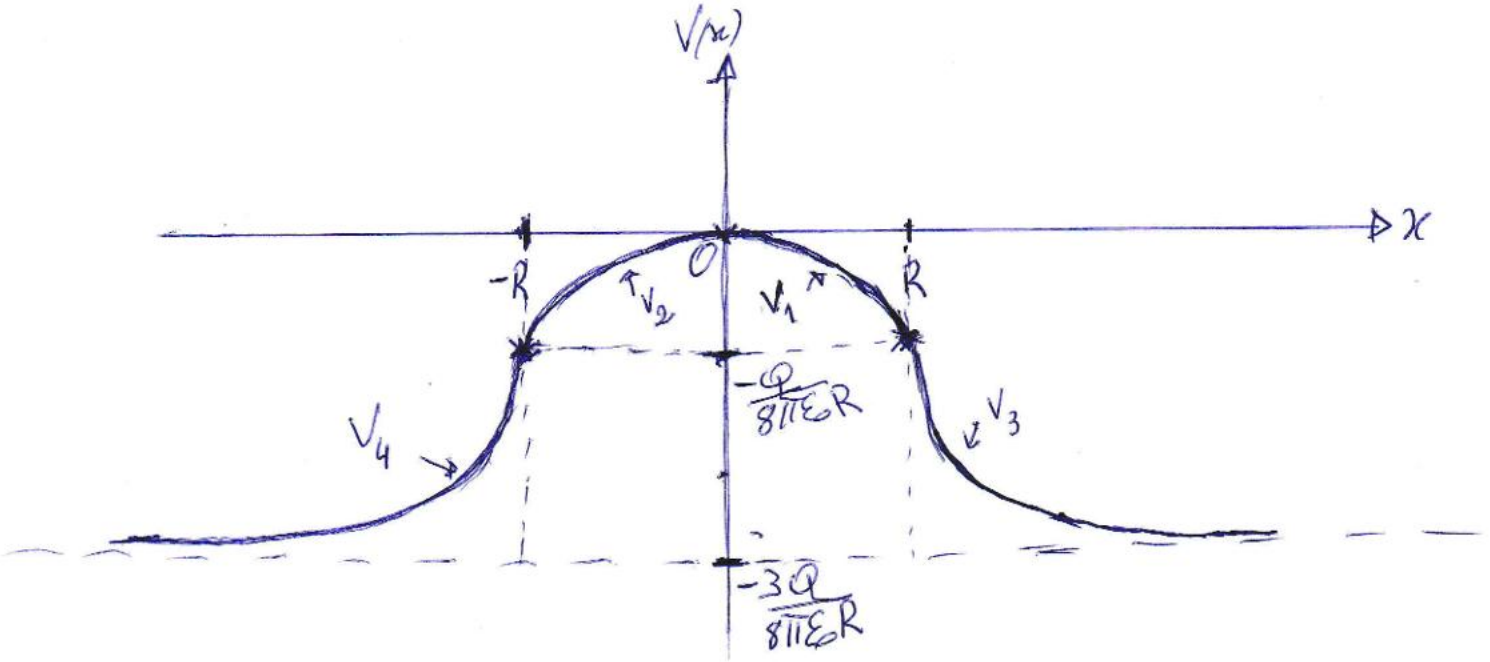
$$\Rightarrow V_2(-R) = V_4(-R) \Rightarrow -\frac{Q R^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 (-R)} + C_4^{te}$$

$$\Rightarrow C_4^{te} = \frac{-Q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \boxed{C_4^{te} = -\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

d'où : $\boxed{V_4 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 x} - \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2R}\right)}$

3) Représentation des allures des courbes $E(x)$ et $V(x)$ :


E(x)
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
$E_1$
$E_2$
$E_3$
$E_4$
-R
R
x
$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$


V(x)
x
-R
O
R
$V_1$
$V_2$
$V_3$
$V_4$
$-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$
$-\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$