UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR — Année universitaire : 2023 - 2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES — L1PCSM : Semestre 2
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE — Travaux dirigés d'analyse

Série N°3

LIMITES ET CONTINUITE

Exercice 1 :

1. Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ ;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\ xE(x-\frac{1}{x})\ ;\quad c)\ \lim_{x\to 0}\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x}\ ;\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$$

2. Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :
   $a)\ f : x \longmapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$; $b)\ g : x \longmapsto xE\left(\frac{1}{x}\right)$; $c)\ h : x \longmapsto x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 2 :

1. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?
   a) $f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$ b) $g(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. Soit la fonction définie sur par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-\frac{1}{x}, \text{ si } x > 4 \\ (x+k)^2, \text{ si } x \leq 4 \end{cases}$

   Déterminer la(les) valeur(s) du réel pour que f soit continue sur son ensemble de définition.

Exercice 3 :

1. Soit $f : [a,\ b] \to [a,\ b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel x_0 vérifiant $f(x_0) = x_0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe. Et si f était croissante ?
3. Montrer que la fonction $g(x) = x^2$ sur $]0, 1[$ n'admet pas de point fixe.
4. Etudier la continuité des fonctions suivantes :
   a) $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & sinon \end{cases}$ b) $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Exercice 4 :

1. Montrer que la fonction $x \to x\ln x$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont uniformément continues :
   a $f(x) = \sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$ (indication : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$)
   b $h(x) = \sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}_+$
3. Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas uniformément continues :
   a $f(x) = x^2$ *sur* $\mathbb{R}^+$
   b $g(x) = \sin(x^2)$ *sur* $\mathbb{R}$

Exercice 5 :

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction f (sans utiliser la dérivée f).
2. Montrer que f réalise une bijection de $I = [1, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.