UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR — Année universitaire : 2023 - 2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES — L1PCSM : Semestre 1
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE — Travaux dirigés d'analyse

Série N°2 : Suites Numériques

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites numériques suivantes

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 + nk + k^2}{n^3}, \quad w_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad x_n = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Exercice 2 : Montrer que la suite de terme générale $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1, en utilisant la définition de la convergence. Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0, on ait $|u_n - 1| < 10^{-3}$.

Exercice 3 :

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes $(b > a > 0)$: $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante.
   (d) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 4 : On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right). \qquad \text{On pose} \qquad v_n = \frac{v_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$ puis calculer v_n en fonction de n.
2. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.
3. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $2^n \geq n$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
5. En déduire alors $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Exercice 5 : Etudier suivant les valeurs de q la suite géométrique $u_n = q^n$.
(Indication : Pour $q > 1$, on pose : $q = 1 + a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\forall n \geq 2$: $(1+a)^n > 1 + na$.)

Exercice 6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{3}{2} \\ u_{n+1} &= (u_n-1)^2+1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$1<u_n<2.$$
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7 :

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites définies par les termes généraux
$$v_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$
En utilisant la définition d'une suite de Cauchy, montrer que $(v_n)_n$ est de Cauchy.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n\geq 2$ par :
$$u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$
   (a) En utilisant Cauchy, montrer que la suite est divergente.
   (b) Monter que $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 8 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=1$ et $\forall n>0$

$$u_{n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}.$$

1. Montrer que $u_n\in[1;2]$, pour tout n.
2. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones.
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge puis déterminer sa limite.

Exercice 9 : Remarque : exercice bonus !!!!!
Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0>-2$ et $\forall n\geq 1$,

$$u_n=\frac{3}{2+u_{n-1}}.$$

1. (a) Si $u_0<1$ et $u_2>u_0$. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_n$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.
   (b) Si $u_0>1$ et $u_2<u_0$. Montrer que la suite extraite $(u_{2n})_n$ est décroissante et la suite $(u_{2n+1})_n$ est croissante.
2. (a) Montrer que $\forall n\geq 1$ on a : $|u_{2n+1}-u_{2n}|\leq\frac{3}{4}|u_{2n}-u_{2n-1}|$
   (b) Montrer que $\forall n\geq 2$ on a : $|u_{2n}-u_{2n-1}|\leq\frac{3}{4}|u_{2n-1}-u_{2n-2}|$
   (c) Déduire de (a) et de (b) que $\forall n\geq 1$, on a :
$$|u_{2n+1}-u_{2n}|\leq\frac{3}{4}|u_{2n-1}-u_{2n-2}|\leq\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}|u_2-u_1|.$$
et que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
3. Calculer la limite $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.