UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR — Année universitaire : 2022 - 2023
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES — L1PCSM : Semestre 1
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE — Travaux dirigés d'analyse

Série N°1 : Nombres réels

Exercice 1 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
3. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse justifier votre réponse :"la racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle."
4. Soient $a = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.
   (a) Vérifier que a et b sont irrationnels. (b) Montrer que $a+b$ et $a \times b$ sont des entiers. (c) Conclure.

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) + E(-x) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $E(x) + E(-x) = -1$.
3. Soit x un réel positif. Comparer $E(\sqrt{x})$ et $E(\sqrt{E(x)})$.
4. Montrer que pour tout réels x et y, on a $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
5. Montrer que pour tout entier relatif n et m on a : $E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$. On pourra distinguer les cas $m + n$ pair et $m + n$ impair.
6. Montrer que si $x > 1$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors pour tout $n \geq 1$, $E\left(\frac{E(nx)}{x}\right) = n - 1$.
7. Calculer $E\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$.

Exercice 3 :

1. Les calculs se font dans $\mathbb{R}$. a) Résoudre l'équation $|a - 1| + |a + 1| = 4$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x+1} + 1| = 4$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} = 4$.
2. Montrer que $x^2 + y^2 - xy \leq 1; \forall x, y \in [0, 1[$.
3. Montrer que $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Par définition, nous avons : $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$, $A \times B = \{a \times b, a \in A, b \in B\}$, et $-A = \{-a, a \in A\}$. Les assertions suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier

1. $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$
2. $A \subset B \Longrightarrow \inf B \leq \inf A$
3. $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
4. $\inf(A + B) = \inf A + \sup B$
5. $\sup(-A) = -\inf(A)$
6. $\sup(A \times B) = \sup A \times \sup B$

Exercice 5 : Soient $I = \{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{3} < x - \frac{3}{2x} \leq 5\}$ et $J = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Écrire I comme réunion (et/ou intersection) d'intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I et J.

Exercice 6 :

1. Soit $\Omega = [-5, 4[\cup\{9\}$ une partie de $\mathbb{R}$.
   (a) Ω est-il un voisinage de $-5, 0, 7, 9$?
   (b) 9 est-il adhérent à Ω ?
   (c) Déterminer, s'ils existent, les points isolés de Ω.
2. 3 est-il un point d'accumulation de $B = \{3 - \frac{(-1)^n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$?
3. Déterminier l'adhérence de B.