UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année universitaire : 2023 - 2024
L1PCSM : Semestre 1
Travaux dirigés d'analyse

Série N.1 : Nombres réels

Exercice 1 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient $a = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.
   (a) Vérifier que a et b sont irrationnels.
   (b) Montrer que $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers.
   (c) Conclure.

Exercice 2 : Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\sup(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \qquad \text{et} \qquad \inf(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Exercice 3 :

1. Etablir, $\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.
2. En déduire que, $\forall (a, b, c) \in [0; 1]^3, \quad \min\big(a(1 - b); b(1 - c); c(1 - a)\big) \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 4 : Etablir, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$,
2. $\big(|x + y| \leq z \quad \text{et} \quad |x - y| \leq z\big) \Longrightarrow |x| + |y| \leq z$,
3. $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$. (*Indication : On pourra étudier la fonction* $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.)

Exercice 5 :

1. Montrer que $\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad E(x) + E(-x) = -1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.
   (*Indication : On distinguera les cas* $E(x)$ *pair et* $E(x)$ *impair.*)
3. Tracer sur l'intervalle $[-3; 3]$, le graphe de la fonction $x \mapsto x - E(x)$.

Exercice 6 : Soient A et B deux parties non vides et bornés de $\mathbb{R}$. Par définition, nous avons :

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}, \quad A \times B = \{a \times b, a \in A, b \in B\} \quad \text{et} \quad -A = \{-a, a \in A\}.$$

Les assertions suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? Justifier

$$(a)\ A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B, \qquad (b)\ A \subset B \Longrightarrow \inf B \leq \inf A,$$
$$(c)\ \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B), \qquad (d)\ \inf(A + B) = \inf A + \sup B,$$
$$(e)\ \sup(-A) = -\inf(A), \qquad (f)\ \sup(A \times B) = \sup A \times \sup B.$$

Exercice 7 : Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur bornes supérieures, inférieures.

$$A_1 = \{a + bn; n \in \mathbb{N}\}, \qquad A_2 = \{a + (-1)^n b; n \in \mathbb{N}, \}, \qquad A_3 = \{a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\},$$

$$A_4 = \{(-1)^n a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad A_5 = \{a + (-1)^n \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 8 : Soient $I = \{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{3} < x - \frac{3}{2x} \leq 5\}$ et $J = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Écrire I comme réunion (et/ou intersection) d'intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I et J.

Exercice 9 :

1. Montrer que $]-4;2[$ est un voisinage de chacun de ses points. Plus généralement, montrer que l'intervalle ouvert $]a;b[$ est un voisinage de chacun de ses points.
2. Soit
$$A = [-1;2[\cup[3;\frac{7}{2}[\cup\{4\}.$$
   (a) Montrer que 2 et 4 sont adhérents à A
   (b) Montrer que 3 est un point d'accumalation de A et que 4 ne l'est pas.
   (c) A est-il voisinage de 3 ?
3. Soit $B = A \cap \mathbb{Q}$. Déterminer l'adhérence de B.
4. Déterminier l'adhérence de A dans $\mathbb{R}$ puis l'adhérence de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$