UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2022-2023

Session 1- Semestre 1 L1 PCSM

Epreuve d'Algèbre

Durée : 2H

Exercice I. Soient P, Q et R trois propositions.

1. Montrer les équivalences suivantes :
   (a) $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ 1
   (b) $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$ 1
2. Montrer de deux manières que la relation suivante est une tautologie : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ 1+1

Exercice II.

1. Remplacer les pointillés par le connecteur logique qui s'impose ($\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$)
   (a) $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ $\Rightarrow$ $x^2 > 1$ 0,75 + 0,75
   (b) $z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z}$ $\Leftrightarrow$ $z \in \mathbb{R}$ 0,75 + 0,75
   (c) $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = 1$ $\Leftarrow$ $x = 2\pi$ 0,75 + 0,75
2. Traduire en implication chacune des propositions suivantes :
   (a) Pour que le réel x soit supérieur ou égal 3, il faut que x soit positif. $(\forall x \geq 3 \Rightarrow x \geq 0)$ 1
   (b) Pour que le réel x soit négatif, il suffit que x soit égal à zéro. 1 $(\forall x \in \mathbb{R}\ x = 0 \Rightarrow x \leq 0)$

Exercice III.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Traduire en quantificateurs les expressions suivantes :
   (a) f est majorée. 1
   (b) f est nulle. 1
   (c) f s'annule. 1
2. Soit f une fonction réelle. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :
   (a) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$. 1 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ 1 $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ 1 $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0$
3. Soient E un ensemble non vide et A, B des parties de E. On rappelle que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.
   (a) Calculer $A \Delta \emptyset$, $\emptyset \Delta E$ et $E \Delta E$. 0,5 + 0,5 + 0,5
   (b) Montrer que $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}$. 0,75 x2
   (c) En déduire que $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$. 1

BONNE CHANCE !

SESSION 1 - SEMESTRE 1
L1 PCSM 2022-2023
CORRECTION ALGEBRE

Exercice 1. Soient P et Q deux propositions

1. Montrons que :

(a) $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$

On a deux propositions de base donc la table de vérité contient $2^2 = 4$ lignes

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$ (A)	$\neg P \vee \neg Q$ (B)	$A \iff B$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

D'après la table l'équivalence est Vraie

NB. L'étudiant pourrait également comparer ligne par ligne A et B sans faire la dernière colonne ($A \iff B$)

) $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$

D'après (a) on a: $\neg[\neg P \wedge \neg Q] \iff$

$\neg(\neg P) \vee \neg(\neg Q) \iff$

$P \vee Q \iff$

$\neg[\neg(P \vee Q)]$

donc $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$

2. Montrons de deux manières que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie

Méthode 1:

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Toutes les lignes sont vraies donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une tautologie

Méthode 2:

$$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow P) \iff \neg P \vee (Q \Longrightarrow P)$$
$$\iff \neg P \vee (\neg Q \vee P)$$
$$\iff (\neg P \vee P) \vee \neg Q$$

Vraie

Vraie

Exercice 2

1. Remplaçons les pointillés par le connecteur logique qui s'impose ($\Longrightarrow, \Longleftarrow, \Longleftrightarrow$)

(a) $x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1$

(b) $z \in \mathbb{C},\ z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(c) $x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = 1 \Longleftarrow x = 2\pi$

En effet :

(a)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x > 1 \Longrightarrow x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow x^2 > 1$

Mais $x^2 > 1 \Longrightarrow x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

ie $x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$ ou $x < -1$

donc $x^2 > 1 \not\Longrightarrow x > 1$

1) Posons $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$z = \bar{z} \iff a+ib = a-ib$

$\iff 2ib = 0$

$\iff b = 0$

$\iff z = a \in \mathbb{R}$

(C) $e^{ix} = 1 \iff \cos x + i \sin x = 1$

$\iff \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \cos x = \cos 0 \\ \sin x = \sin 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \text{ ou } x = -0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 + 2k\pi \text{ ou } \pi - x = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\iff x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

donc $x = 2\pi \Rightarrow e^{ix} = 1$ (car $k = 1 \in \mathbb{Z}$)

et $e^{ix} = 1 \not\Rightarrow x = 2\pi$

2. Traduisons en implication chacune des propositions suivantes :

1) Pour que le réel x soit supérieur ou égal à 3 il faut que x soit positif $\Longleftrightarrow$

$x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \Longrightarrow x \geq 0$

(b) Pour que le réel x soit négatif, il suffit que x soit égal à zéro $\Longleftrightarrow$

$x \in \mathbb{R},\ x = 0 \Longrightarrow x \leq 0$

Exercice 3 1) Traduisons en quantificateurs les expressions suivantes :

(a) f est majorée $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

(b) f est nulle $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

(c) f s'annule $\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

2) Donnons la négation de chacune des propositions suivantes :

(a) $\neg[\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M] \Longleftrightarrow$

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

b) $\neg[\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0] \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

c) $\neg[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0] \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

1) Soient E un ensemble, $A, B \subseteq E$ $(E \neq \emptyset)$

(a) Calculons $A \Delta \emptyset$, $\emptyset \Delta E$ et $E \Delta E$

$$A \Delta \emptyset = (A \cap \bar{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \bar{A})$$
$$= (A \cap E) \cup \emptyset$$
$$= A$$

$$\emptyset \Delta E = (\emptyset \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{\emptyset})$$
$$= \emptyset \cup (E \cap E)$$
$$= \emptyset \cup E$$
$$= E$$

$$E \Delta E = (E \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{E})$$
$$= \emptyset \cup \emptyset$$
$$= \emptyset$$

(b) Montrons que $(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap B \cap \bar{C}$ et $(A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap C \cap \bar{B}$

- $(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = (A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$
$$= [(A \cap B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cap B) \cap \bar{C}]$$
$$= [A \cap \bar{A} \cap B] \cup [A \cap B \cap \bar{C}]$$
$$= \emptyset \cup (A \cap B \cap \bar{C})$$
$$= A \cap B \cap \bar{C}$$