Exercice 8 :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

i) Réflexivité :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x^2 - x^2 = 0 = x - x$

Donc $x \mathcal{R} x$

D'où $\mathcal{R}$ est réflexive

ii) Symétrie :

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \mathcal{R} y$.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

$$y^2 - x^2 = y - x$$

Donc $y \mathcal{R} x$.

D'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

ii) Transitivité :

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases}$

$xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$yRz \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z$

$x^2 - z^2 = x - z$

Donc xRz

D'où R est transitive.

(i), (ii) et (iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\dot{a} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} a \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - a^2 = x - a \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - a^2 - (x-a) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x+a) - (x-a) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x+a-1) = 0 \}$$

$$= \{ a ; 1-a \}$$

$$\dot{0} = \{ 0 ; 1 \} \qquad \dot{2} = \{ 2 ; -1 \}$$

$$\dot{1} = \{ 1 ; 0 \} \qquad \dot{4} = \{ 4 ; -3 \}$$

$$E/\mathcal{R} = \{ \dot{a} \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \{a ; 1-a\} \mid a \in \mathbb{R} \}$$

ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.

Exercice 9 :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(x \mathcal{R} y \iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2 \right)$

1) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

i) Réflexivité :

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $x^4 - x^2 = x^4 - x^2$

Donc $x \mathcal{R} x$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

ii) Symétrie :

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels $x \mathcal{R} y$.

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

$$y^4 - y^2 = x^4 - x^2$$

$$y \mathcal{R} x$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii) Transitivité :

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases}$

$xRy \Rightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$

$yRz \Rightarrow y^4 - y^2 = z^4 - z^2$

$x^4 - x^2 = z^4 - z^2$

Donc xRz. Donc R est transitive.

(i), (ii) et (iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ d'un élément $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \dot{\alpha} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} \alpha \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 - x^2 = \alpha^4 - \alpha^2 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 - x^2 - \alpha^4 + \alpha^2 = 0 \}$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x^4 - a^4) - (x^2 - a^2) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) - (x^2 - a^2) = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - a^2)(x^2 + a^2 - 1) = 0 \}$$

$$(x^2 - a^2)(x^2 + a^2 - 1) = 0$$

$$(x - a)(x + a)(x^2 + a^2 - 1) = 0$$

$x = a$ ou $x = -a$ ou $x^2 + a^2 - 1 = 0$

$x^2 + a^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 - a^2$

1(a) : Si $1 - a^2 = 0$

$a = 1$ ou $a = -1$.

$x^2 = 0$

$x = 0$

2(a) : $1 - a^2 < 0$

$x^2 = 1 - \alpha^2$ n'a pas de solution.

$1 - \alpha^2 < 0$

$\alpha^2 - 1 > 0 \Rightarrow \alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $\quad \alpha = \{ \alpha_1 - \alpha \}$

3(a) : $1 - \alpha^2 > 0$

$\alpha^2 - 1 < 0 \Rightarrow \alpha \in]-1, 1[$

$x^2 = 1 - \alpha^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{1-\alpha^2}$ ou $x = -\sqrt{1-\alpha^2}$

Si $\alpha \in]-1,1[$,

$\dot{\alpha} = \{-\alpha ; \alpha ; \sqrt{1-\alpha^2} ; -\sqrt{1-\alpha^2}\}$

- Si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ $\quad \dot{\alpha} = \{1 ; -1 ; 0\}$
- Si $\alpha \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\dot{\alpha} = \{-\alpha ; \alpha\}$
- Si $\alpha \in]-1,1[$, $\dot{\alpha} = \{\alpha ; -\alpha ; \sqrt{1-\alpha^2} ; -\sqrt{1-\alpha^2}\}$

3)

Comme $0 \in]-1,1[$, on a : $\dot{0} = \{0 ; -1 ; 1\}$

$\frac{1}{2} \in]-1;1[$ $\quad \dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; \sqrt{1-\frac{1}{4}} ; -\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right\}$

$\dot{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Comme $3 \in]1,+\infty[$ $\quad \dot{3} = \{-3 ; 3\}$

5) Comme $\dot{O} = \{0, 1, -1\}$

pour $\alpha \in]-1, 1[$ on a :

$$\dot{\alpha} = \{\alpha ; -\alpha ; \sqrt{1-\alpha^2} ; -\sqrt{1-\alpha^2}\}$$

pour que $\operatorname{card}(\dot{\alpha}) = 4$ il faut que

$\alpha \in]-1, 0[\cup]0, 1[$

4) Si $\alpha \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

alors $\dot{\alpha} = \{-\alpha ; \alpha\}$

Donc $\text{card}(\dot{\alpha}) = 2$.

6) Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = -1$ ou $\alpha = 1$

on a $\dot{\alpha} = \{0 ; 1 ; -1\}$ $\text{card}(\dot{\alpha}) = 3$

Exercice 7 :

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}^{*2}$, $\left(x \mathcal{S} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = x^k \right)$

1) Montrons $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

i) Réflexivité :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a $x = x^1$

Donc $x \mathcal{R} x$,
d'où $\mathcal{R}$ est réflexive

ii) Antisymétrie :

Soient $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ tq $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$

$x \mathcal{R} y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } y = x^k$

$y \mathcal{R} x \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x = y^{k'}$

$y = y^{kk'}$

$$\ln(y) = kk'\ln(y)$$

$$\ln(y) - kk'\ln(y) = 0 \Rightarrow \ln(y)\left(1 - kk'\right) = 0$$

$$\ln(y) = 0 \quad \text{ou} \quad kk' = 1$$

1 cas : si $\ln(y) = 0$

$$y = 1 \Rightarrow x = 1$$

donc $x = y$

2 cas : $kk' = 1$.

$k = 1$ et $k' = 1$

Donc $x = y$

D'où ρ est antisymétrique

iii) Transitivité :

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ tq $\begin{cases} x \rho y \\ y \rho z \end{cases}$

$x \rho y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } y = x^k$

$y \rho z \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tq } z = y^{k'}$

$\Rightarrow z = x^{kk'}$

Posons $k'' = kk' \in \mathbb{N}^*$.

$x^{k''} = x^{k''}$

Donc $x \mathcal{S} y$

$\mathcal{S}$ est transitive.

(i), (ii) et (iii) $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

Vérifions que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre partiel.

On a $2 \not\mathcal{S} 3$ et $3 \not\mathcal{S} 2$. Donc $\mathcal{S}$ est d'ordre partiel