UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2022-2023

Algèbre - L1 PCSM

Série 1 : Logique et Ensembles

Exercice 1. Soient P, Q et R trois propositions.
Montrer de deux manières différentes que les relations suivantes sont des tautologies :

1. $(P \Rightarrow [Q \Rightarrow P]$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)]$
3. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge R)]$

Exercice 2. Pour tous x et y on note $P(x, y)$ l'assertion $''x^2 + 2y > 0''$
Dire si les assertions suivantes sont vraies en justifiant votre réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x, y).$

Exercice 3 . Donner la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}^*)(\forall z \in \mathbb{Z})(xy \geq z)$
2. $\big(\exists x \in \mathbb{Z}^*, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y\big) \Longrightarrow \big(\exists z \in \mathbb{Z}, zy = x\big)$
3. $\big[(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \leq 0)\big] \Longrightarrow \big[(\exists y \in \mathbb{R}^+)\ (x^2 = y)\big]$
4. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \big[|x - x_o| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Traduire en terme de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée.
2. f est bornée.
3. f est impaire.
4. f s'annule.
5. f n'est pas nulle.
6. f a toujours les même valeurs en deux points distincts.

Exercice 5. Soient x, y et z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire.

On suppose que les trois implications suivantes sont vraies.

1. $(x = 0) \Rightarrow (y > 0)$
2. $(x > 0) \Rightarrow (y < 0)$
3. $(y \neq 0) \Rightarrow (z > 0)$

Comparez x, y et z.

Exercice 6. Montrer par récurrence que :

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+)(2n+1)}{6}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 7.

1. Démontrer que le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est irrationnel.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2$ est un multiple $5 \Longrightarrow n$ est un multiple de 5.
3. Montrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $[A \cap (\bar{A} \cup B)] \cup [\bar{A} \cap (A \cup B)]$.
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$
3. $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$
4. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

Exercice 9. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$
2. $A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$
3. $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
5. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Exercice 10. Soient $E = \mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 4\}$ et $C = \{x \in \mathbb{Z} / \mid x - 1 \mid = 3\}$

1) Donner la liste des éléments de A, B et C.

2) Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \triangle B$.