UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2023 - 2024

Algèbre - L1 PCSM

Série 4 : Espaces vectoriels

Exercice I. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Les sous-ensembles F suivants sont-ils des sous -espaces vectoriels de E ?

1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = z + 2024\}, \quad E = \mathbb{R}^3$

2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}, \quad E = \mathbb{R}^3$

3) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x - y\}, \quad E = \mathbb{R}^3$

4) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y \ et \ z = 2t\}, \quad E = \mathbb{R}^4$

5) $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) / (u_n) \quad convergente\}, \quad E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

6) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \ injective\}, \ E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

7) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \int_0^1 f = 0\}, \ E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice II. Soient F et G deux $\mathbb{K}$ sous -espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $F \cap G$ est un sous -espace vectoriel de E.

2) Montrer que $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$

3) Montrer que $F \cup G$ est un sous- espace $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice III. On considère $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \quad paire\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \quad impaire\}$.

Montrer que P et I sont des sous- espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice IV. Montrer que les parties F suivantes sont des sous -espaces vectoriels puis en déduire une base et la dimension de chacun des s.e.v.

1) $F = \{(x, x-y, x+2y, -y)/x, y \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^4$

2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 6t = 0 \ et \ x - y + 4z = 0\}, \quad E = \mathbb{R}^3$

3) $F = \{(x, y, z, t)\mathbb{R}^4 / x + y = y + t = x + t = y + z = z + t\}, \quad E = \mathbb{R}^4$

Exercice V. Soient $B = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ et $F = lin(u_1, u_2)$ où $u_1 = (0, 1, 2)$ et $(2, 3, 4)$

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire les composantes de $v = (-6, 10, 2)$ dans la base B

2) Déterminer α pour que $x = (1, \alpha, 2) \in F$.

Exercice VI. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres, génératrices, bases ?

1) $C_1 = ((1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0))$

2) $C_2 = ((1, 0, 2), (2, 1, 0))$

3) $C_3 = ((1, 0, 2), (2, 1, 0), (0, 0, 2))$

Exercice VII. Soient F le sous -espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (1, -1, 0, 2), u_2 = (2, 1, 3, 1), u_3 = (4, 5, 9, -1)$ et G le sous -espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_2 = (3, -4, 4, 2)$

1) $S_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ et $S_2 = \{v_1, v_2\}$ peuvent-ils être complétés en des bases de $\mathbb{R}^4$?

2) Donner une base de F et une base de G.

3) Déterminer une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.