UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2023 - 2024

Algèbre - L1 PCSM

Série 3

Exercice 1.

Soient $k, k' \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $\perp$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \perp y = kxy + k'(x + y)$$

1. Déterminer k, k' pour que la loi $\perp$ soit associative.
2. Etudier les propriétés de la loi $\perp$ pour $k' = 0$ puis pour $k' = 1$.

Exercice 2. On définit dans $G = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ la loi $\star$ par : $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$.

1. Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne dans G.
2. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3.

1. On définit dans $G =]-1, 1[$ la loi $*$ par : $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
   (a) Vérifier "$*$" est une loi de composition interne dans G.
   (b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien
2. On définit dans $\mathbb{R}$ la loi $\odot$ par : $x \odot y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
   (a) Vérifier que $(\mathbb{R}, \odot)$ est un groupe
   (b) Ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 4. Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\odot$ la loi de composition interne définie dans G par

$$(x, y) \odot (x', y') = (xx', xy' + y)$$

Montrer que $(G, \odot)$ est un groupe non commutatif..