UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 2023 - 2024
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUE
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Algèbre - L1 PCSM

Série 2 : Applications et Relations

Exercice 1. Soient $E = \{0, 1\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$. Enumérer les applications de E dans F, puis les applications de F dans E.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x^2$$

$$f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad f_4 : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{1, 3, 5, 20\}$$
$$x \longmapsto x^2 \qquad avec\ f(0) = 1; f(1) = 5; f(2) = 20$$

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f_6 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y) \qquad x \longmapsto x^2$$

Exercice 3.

1. Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + 2x + 3$.
   a) Déterminer $g([-2, -1[)$, $g([-3, 3])$ et $g(\mathbb{R})$
   b) $g^{-1}(\{3\})$, $g^{-1}(\{1\})$ et $g^{-1}(\mathbb{R})$.
   c) En déduire que g n'est ni injective, ni surjective.
2. On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (3x, x + y, x + y - 2z)$.
   a) Montrer que ψ est bijective.
   b) Déduire l'application ψ^{-1}.

Exercice 4. Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,
les applications définies par : $\forall x \in \mathbb{N}\ \ f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ impair.} \end{cases}$$

1°) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g

2°) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

Exercice 5. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

1)$\forall A, B \in P(E) \quad (A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B))$

2)$\forall A, B \in P(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

3)$\forall A, B \in P(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

4)$\forall A, B \in P(E) \quad (A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$

5)$\forall A, B \in P(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

6)$\forall B \in P(F) \quad f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$

Exercice 6. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Etablir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.
5. f, g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
6. f, g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.

Exercice 7. On définit dans $\mathbb{N}^*$, la relation binaire notée ρ par :

$\forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ x \rho y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ telque $y = x^k$.

1) Montrer que ρ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

2) On considère dans $\mathbb{N}^*$, l'ordre ρ et les parties $A = \{2, 8, 24, 32\}$ et $B = \{4, 16, 256\}$.

Pour l'ordre ρ, A et B ont-elles un plus petit élément ; un plus grand élément ?

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}$, on considère les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ définies par :

1. $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$
2. $x \mathcal{R}' y \Longleftrightarrow x e^y = y e^x$.

Montrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des relations d'équivalences.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par : $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la classe d'un élément $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) En déduire la classe des éléments 0, $\frac{1}{2}$ et 3.

4) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $card(\overline{\alpha}) = 2$

5) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $card(\overline{\alpha}) = 4$

6) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $card(\overline{\alpha}) = 3$ avec $\overline{\alpha}$ la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ de α.