UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

2023-2024

Algèbre - L1 PCSM

Série 1 : Logique et Ensembles

Exercice 1. Soient $\mathcal{R}, S$ et $\mathcal{T}$ trois assertions.

Montrer de deux manières différentes que les relations suivantes sont des tautologies :

1. $(\mathcal{R} \Rightarrow S) \Rightarrow [(\mathcal{R} \wedge \mathcal{T}) \Rightarrow (S \wedge \mathcal{T})]$
2. $(\mathcal{R} \Rightarrow S) \Rightarrow [(\mathcal{R} \vee \mathcal{T}) \Rightarrow (S \vee \mathcal{T})]$

Exercice 2. Pour tous x et y on note $P(x, y)$ l'assertion $''x^2 + y = 0''$

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y).$

Exercice 3 . Donner la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}^*)(\forall y \in \mathbb{N})(x \neq yz)$
2. $\big(\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y\big) \Longrightarrow \big(\exists z \in \mathbb{N}, xz = y\big)$
3. $\big[(\forall x \in \mathbb{R})\ (x \leq 0)\big] \Longrightarrow \big[(\exists y \in \mathbb{R}^+)\ (x = y^3)\big]$
4. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \rho > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \big[|x - x_o| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Traduire en terme de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est minorée
2. f est bornée
3. f est paire
4. f s'annule
5. f est nulle
6. f est constante
7. f ne s'annule pas
8. f n'est pas l'application nulle
9. f a toujours les même valeurs en deux points distincts

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} inf(i,j)\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} sup(i,j)\Big)$$

Exercice 6. Soient x, y et z trois réels parmi lesquels il y a 0 et deux réels non nuls de signe contraire.

On suppose que les trois implications suivantes sont vraies.

1. $(x = 0) \Rightarrow (y > 0)$
2. $(x > 0) \Rightarrow (y < 0)$
3. $(y \neq 0) \Rightarrow (z > 0)$

Comparez x, y et z.

Exercice 7. Montrer par récurrence que :

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 8.

1. Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n$ est pair $\iff n^2$ est pair.
3. En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 9. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $[A \cap (\bar{A} \cup B)] \cup [\bar{A} \cap (A \cup B)]$.
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$
3. $A \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C)$
4. $A \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

Exercice 10. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble non vide E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \cap B = A \cup B \iff A = B$
2. $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$
3. $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

Exercice 11.

1. Soient $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R}/(x+2)(x^4 + x^2 - 6) = 0)\}$ et $B = [-5, 1[$
   Déterminer $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \Delta B$
2. Soient $E = \mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z}/ -3 < x \leq 3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z}/x^3 - 1 = 0\}$
   (a) Donner la liste des éléments de A et B .
   (b) Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \triangle B$.